



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-1-07
Anotace	Dvě varianty procvičovacích či testových textů z látky SOUSTAVY DVOU ROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH s vypracovaným početním řešením a použitými vztahy /6 příloh/.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	1.ročník, třída 5.E, dne 14.2.2013 , Matematika

Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých /kalkulačka, 1.roč./

A

1/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé x, y : a/ $\frac{x+}{y+} = \frac{3}{4} \wedge \frac{y+}{x+y} - \frac{4}{5} =)$

b/ $x = 3y - 1,$
 $0 = 3y - x - 1$

2/ Řešte v oboru přirozených čísel soustavu: $2x + y - 11 = 0$
 $y^2 - 2x - 5y + 6 = 0$

3/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé x, y metodou substitute:

$$-\frac{10}{x-1} - \frac{1}{y+1} = -$$

$$\frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+1} = 2$$

4/ Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru 24 : 10, má přeponu dlouhou 260 dm. Kolik měří jeho odvěsny?

Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých /kalkulačka, 1.roč./

B

1/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé: a/ $(x+3)(y+5) = (x+1)(y+8)$
 $(2x-3)(5y+5) = 2(5x-6)(y+1),$

b/ $z - 3v = -1$
 $-z - 1 = -3v$

2/ Řešte v oboru celých čísel soustavu: $5x + 2y - 12 = 0 \wedge x^2 - y = 0.$

3/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé x, y metodou substitute:

$$\frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+1} =$$

$$\frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+1} = 2$$

4/ Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru 12 : 5, má přeponu dlouhou 2600cm. Kolik měří jeho odvěsny?

Použité vztahy:

Diskriminant kvadratické rovnice $D = b^2 - 4ac$

Kořeny kvadratické rovnice $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Pythagorova věta pro trojúhelník ABC s přeponou c: $c^2 = a^2 + b^2$

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia- Rovnice a nerovnice – RNDr. Jura Charvát a kolektiv,
r.1999, ISBN 80-7196-154-X

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag
Hrubý, Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-030-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra
Petáková, 1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na
VŠ – RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

Řešení: A

1/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé x, y : a/ $\frac{x+y}{y} = \frac{3}{4} \wedge \frac{y}{x+y} - \frac{4}{5} = 0$

Podmínky: $y \neq -1 \wedge y \neq -x$

První rovnici vynásobíme nenulovým výrazem $4 \cdot (y+1)$ a druhou rovnici $5 \cdot (x+y)$:

$$4 \cdot (x+1) = 3 \cdot (y+1) \quad \wedge \quad 5 \cdot (y+1) - 4 \cdot (x+y) = 0$$

$$4x + 4 = 3y + 3$$

$$5y + 5 = 4x + 4y$$

$$4x = 3y - 1$$

$$y = 4x - 5$$

$$x = \frac{3y - 1}{4}$$

Užijeme dosazovací metodu – do první rovnice dosadíme $y = 4x - 5$ a získáme

$$x = \frac{3 \cdot (4x - 5) - 1}{4} \quad \text{a odtud } \underline{x = 2}, \text{ což dosadíme za } x \text{ do vztahu } y = 4x - 5 \text{ a získáme}$$

$$\underline{y = 3}.$$

Pro toto y a x ověříme podmínky – jsou obě splněny, soustava má tedy jediné řešení,

a množina kořenů dané soustavy rovnic je $K = \underline{\{2; 3\}}$.

b/ $x = 3y - 1$

$$\underline{0 = 3y - x - 1}$$

$$x = 3y - 1$$

$$\underline{x = 3y - 1}$$

Obě rovnice jsou ekvivalentní, proto má soustava nekonečně mnoho řešení. Pokud je $y = t$, kde t je libovolné reálné číslo, lze vyjádřit $x = 3t - 1$. Množinu kořenů lze tedy zapsat ve tvaru $K = \underline{\{3t - 1; t\} \mid t \in \mathbb{R}}$.

2/ Řešte soustavu rovnic pro reálné neznámé x, y : $2x + y - 11 = 0$
 $y^2 - 2x - 5y + 6 = 0$

Z první rovnice vyjádříme $y = 11 - 2x$ a dosadíme do druhé rovnice:

$(11 - 2x)^2 - 2x - 5(11 - 2x) + 6 = 0$, odtud odstraněním závorek dostaneme kvadratickou rovnici $4x^2 - 36x + 18 = 0$, po vydělení 4 tedy $x^2 - 9x + 18 = 0$.

Rozkladem levé strany na součin $(x - 6) \cdot (x - 3)$ získáme kořeny $x_1 = 6$ a $x_2 = 3$.

Dosazením za x do vztahu $y = 11 - 2x$ získáme $y_1 = -1$, $y_2 = -5$.

Množina řešení dané soustavy rovnic je $K = \underline{\{6; -1\} \cup \{3; -5\}}$.

3/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé x, y metodou substituce:

$$\begin{aligned} -\frac{10}{x-5} - \frac{1}{y+2} &= - \\ \frac{25}{x-5} + \frac{3}{y+2} &= 2 \end{aligned}$$

Podmínky jsou $x \neq 5 \wedge y \neq -2$.

Po provedení substituce $u = x - 5$, $v = y + 2$ získáme soustavu

$$\begin{aligned} -\frac{10}{u} - \frac{1}{v} &= - \\ \frac{25}{u} + \frac{3}{v} &= 2 \end{aligned}$$

Obě rovnice vynásobíme dle podmínek nenulovým výrazem uv a získáme soustavu

$$\begin{aligned} -10v - u &= uv \\ 25v + 3u &= 2uv \end{aligned}$$

Vynásobíme první rovnici -2 a sečteme ji s druhou rovnicí, čímž odstraníme výraz uv . Získáme rovnici $5v + u = 0$, tedy $u = -5v$, což dosadíme do první rovnice a dostaneme kvadratickou rovnici pro v : $v^2 + v = 0$, tedy $v \cdot (v + 1) = 0$. Odtud $v_1 = 0$ a $v_2 = -1$.

Protože $u = -5v$, je $u_1 = 0$ a $u_2 = 5$.

Dosazením do substituce získáme kořeny $x_1 = 5$ a $x_2 = 10$, $y_1 = -2$, $y_2 = -3$. Protože dvojice $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ nevyhovuje podmínkám, je množina řešení dané soustavy rovnic

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

4/ Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru $24 : 10$, má přeponu dlouhou 260 dm. Kolik měří jeho odvěsny?

Pomocí daného poměru vyjádříme odvěsny: $a = 24x$, $b = 10x$.

Po dosazení do vzorce Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ získáme rovnici

$$260^2 = (24x)^2 + (10x)^2. \text{ Po umocnění a sečtení rovnici } 676x^2 = 67\,600, \text{ tedy } x^2 = \pm 10.$$

Protože strany v trojúhelníku mají kladnou velikost, vyhovuje jen $x = 10$, pak tedy odvěsny měří $a = 240$ dm a $b = 100$ dm.

Řešení: B

1/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé: a/ $(x+3)(y+5) = (x+1)(y+8)$
 $(2x-3)(5y+5) = 2(5x-6)(y+1)$

$$\begin{array}{r} \text{Roznásobením získáme soustavu: } xy + 3y + 5x + 15 = xy + y + 8x + 8 \\ 10xy - 15y + 10x - 15 = 10xy - 12y + 10x - 12 \\ \hline 2y - 3x + 7 = 0 \\ -3y \quad - 3 = 0 \end{array}$$

Z druhé rovnice vyjádříme $y = -1$ a po dosazení do první rovnice je $x = \frac{5}{3}$.

Množina řešení dané soustavy rovnic je $K = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{array}{l} \text{b/ } z - 3y = -1 \\ \underline{-z - 1 = -3y} \end{array}$$

Převedením neznámé z na jednu stranu získáme soustavu

$$\begin{array}{l} z = 3y - 1 \\ \underline{z = 3y - 1} \end{array}$$

Obě rovnice jsou ekvivalentní, proto má soustava nekonečně mnoho řešení. Položíme-li $y = t$, kde t je libovolné reálné číslo, lze vyjádřit $z = 3t - 1$. Množinu kořenů lze tedy zapsat ve tvaru $K = \left\{ \begin{bmatrix} 3t-1 \\ t \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$.

2/ Řešte v oboru reálných čísel soustavu: $5x + 2y - 12 = 0 \wedge x^2 - y = 0$.

Z druhé rovnice vyjádříme $y = x^2$ a dosadíme do první rovnice:

$$\begin{array}{l} 5x + 2x^2 - 12 = 0. \text{ Kvadratická rovnice } 2x^2 + 5x - 12 = 0 \text{ má diskriminant} \\ D = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 12 = 121 \text{ a tedy dva různé reálné kořeny} \\ x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - 11}{4} = -4. \end{array}$$

Dosazením za x do vztahu $y = x^2$ získáme $y_1 = \frac{9}{4}$, $y_2 = 16$. Množina řešení dané

soustavy rovnic je $K = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} \right\}$.

3/ Vyřešte soustavu rovnic pro reálné neznámé x, y metodou substituce:

$$\frac{10}{x-5} + \frac{1}{y+2} = 1$$

$$\frac{25}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 2$$

Podmínky jsou $x \neq 5 \wedge y \neq -2$.

Po provedení substituce $u = x - 5$, $v = y + 2$ získáme soustavu

$$\frac{10}{u} + \frac{1}{v} = 1$$

$$\frac{25}{u} + \frac{3}{v} = 2$$

Obě rovnice vynásobíme dle podmínek nenulovým výrazem uv a získáme soustavu

$$10v + u = uv$$

$$25v + 3u = 2uv$$

Vynásobíme první rovnici -2 a sečteme ji s druhou rovnicí, čímž odstraníme výraz uv . Získáme rovnici $5v + u = 0$, tedy $u = -5v$, což dosadíme do první rovnice a po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro v : $v^2 + v = 0$, tedy $v \cdot (v + 1) = 0$. Odtud $v_1 = 0$ a $v_2 = -1$.

Protože $u = -5v$, je $u_1 = 0$ a $u_2 = 5$.

Dosazením do substituce získáme kořeny $x_1 = 5$ a $x_2 = 10$, $y_1 = -2$, $y_2 = -3$. Protože dvojice $\{5; -2\}$ nevyhovuje podmínkám, je množina řešení dané soustavy rovnic

$$K = \{10; -3\}$$

4/ Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru $12 : 5$, má přeponu dlouhou 2600cm. Kolik měří jeho odvěsny?

Pomocí daného poměru vyjádříme obě odvěsny: $a = 12x$, $b = 5x$.

Po dosazení do vzorce Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ získáme rovnici

$$2600^2 = (12x)^2 + (5x)^2$$

Po umocnění a sečtení rovnici $169x^2 = 2600^2$, tedy $x^2 = \pm \frac{2600^2}{13^2}$, tedy $x = \pm \frac{2600}{13} = 200$. Protože strany v trojúhelníku mají kladnou velikost,

vyhovuje jen $x = 200$, pak tedy odvěsny měří $a = 2400$ cm a $b = 1000$ cm.