



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2- 8-1-08
Anotace	Rovnice a nerovnice s neznámou pod odmocninou - shrnutí učiva a samostatné procvičování.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 3.A,B, 7.E, 15.5.2013, Matematický seminář

Rovnice s neznámou pod odmocninou (shrnutí a opak.)

- neznámá je pod odmocninou
- umocnění každé strany rovnice = úprava
není (obecně) ekvivalentní,
zkouška vždy nutná
- pozor na definiční obor proměnné:
 - podmínky (jsou-li jednoduché, úplné)
 - bez podmínek na začátku řešení lze počítat,
pak jsou úpravy důsledkové,
zkouška vždy nutná



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

I Rovnice (1 i více odmocnin)

1) V R: $\sqrt{3x+1} + x = 3$ (jedna z podmínek: $x \geq -\frac{1}{3}$)

$$\sqrt{3x+1} = 3 - x \quad /^2$$

$$3x+1 = 9 - 6x + x^2$$

$$3x+1 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$(x-8)(x-1) = 0$$

$$x = 8 \quad \vee \quad x = 1$$

$$\text{zk.: } L = \sqrt{25} + 8 = 13$$

$$P = 3 \quad L \neq P$$

$$L = \sqrt{4} + 1 = 3$$

$$P = 3 \quad L = P$$

vzhledem ke zkoušce $K = 1$

2) V R: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{1-3x} + x \quad /^2$ (jedna z podmínek: $x \leq \frac{1}{3}$)

$$x^2 + 1 = 1 - 3x + 2x\sqrt{1-3x} + x^2$$

$$2x\sqrt{1-3x} = 3x \quad /^2 \quad (\text{je třeba umocnit znovu})$$

$$4x^2 - 12x^3 = 9x^2$$

$$5x^2 + 12x^3 = 0$$

$$x^2(5 + 12x) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{5}{12}$$

$$\text{zk.: } L \cap P = \sqrt{1} = 1$$

$$P \cap L = \sqrt{1} + 0 = 1 \quad L = P$$

$$L\left(-\frac{5}{12}\right) = \sqrt{\frac{25}{144} + \frac{144}{144}} = \frac{13}{12}$$

$$P\left(-\frac{5}{12}\right) = \sqrt{\frac{12}{12} + \frac{15}{12}} - \frac{5}{12} = \frac{3}{2} - \frac{5}{12} = \frac{13}{12} \quad L = P$$

vzhledem ke zkoušce $K = \left\{-\frac{5}{12}; 0\right\}$

Podobně vyřeš:

$$3) \quad \text{V R: } 2\sqrt{x+5} - x = 2$$

$$4) \quad \text{V R: } \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$$

$$5) \quad \text{V R: } 1 - \sqrt{2x+2} = \sqrt{2x-5}$$

$$6) \quad \text{V R: } \sqrt{x-5} + \sqrt{x} = \frac{10}{\sqrt{x-5}}$$

II Nerovnice

7) V R: $\sqrt{x-5} \leq 2$ podmínka $x \geq 5$
 porovnání $+\leq+$ lze $/^2$

Pak řešíme $x-5 \leq 4$
 $x \leq 9$

Vzhledem k podmínce $K = \langle 5; 9 \rangle$

8) V R: $\sqrt{x+7} \geq -12$ podmínka $x \geq -7$
 porovnání $+\geq-$ platí pro $\forall x \in D$

Vzhledem k podmínce $K = \langle -7; +\infty \rangle$

9) V R: $\sqrt{x+3} \geq x+1$ podmínka $x \geq -3$
POZOR... na pravé straně je také neznámá

porovnání

I pro $x+1 < 0$ $\langle x < -1 \rangle$ je $+\geq-$
 platí pro $\forall x \in D \cap \langle -\infty; -1 \rangle$

II pro $x+1 \geq 0$ $\langle x \geq -1 \rangle$ je $+\geq+$ lze $/^2$
 Pak řešíme $x+3 \geq \langle x+1 \rangle^2$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



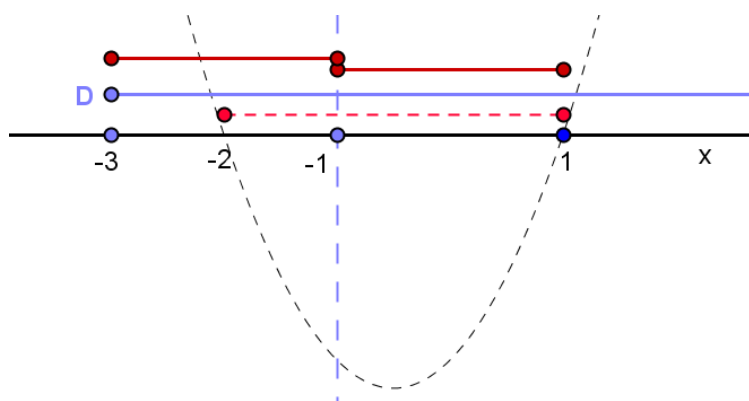
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$x + 3 \geq x^2 + 2x + 1$$

$$0 \leq x^2 + x - 2$$

$$(x + 2)(x - 1) \leq 0 \quad \text{takže} \quad x \in \langle -2; 1 \rangle \cap \langle -1; +\infty \rangle$$

Výsledné řešení... vše postupně znázorníme na číselnou osu



Výsledné řešení $K = \langle -3; 1 \rangle$

Podobně vyřeš:

10) V R: $\sqrt{x^2 + 1} \leq 3$ podmínka: $x \in R$

11) V R: $\sqrt{3x - 5} \geq \sqrt{x}$ podmínka: $x \geq \frac{5}{3}$

12) V R: $\sqrt{2x + 3} \geq x$ podmínka: $x \geq -\frac{3}{2}$

III Zkontroluj výsledky

3) $2\sqrt{x+5} = 2+x \quad /^2$ (jedna z podmínek: $x \geq -5$)

$$x^2 = 16$$

$$|x| = 4$$

zk.: $L \leftarrow 4 \Rightarrow 2\sqrt{1} + 4 = 6$ $P \leftarrow 4 \Rightarrow 2$ $L \neq P$

$L \leftarrow 4 \Rightarrow 2\sqrt{9} - 4 = 2$ $P \leftarrow 4 \Rightarrow 2$ $L = P$

vzhledem ke zkoušce $K = 4$

4) $\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4} \quad /^2$ (jedna z podmínek: $x \geq -\frac{1}{3}$)

$$2x - 4 = 2\sqrt{x+4} \quad /:2 \quad /^2$$

$$\leftarrow -2 \Rightarrow x + 4$$

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 5$$

zk.: $L \leftarrow 0 \Rightarrow \sqrt{1} - \sqrt{4} = -3$ $P \leftarrow 0 \Rightarrow 1$ $L \neq P$

$L \leftarrow 5 \Rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{9} = 1$ $P \leftarrow 5 \Rightarrow 1$ $L = P$

vzhledem ke zkoušce $K = 5$

5) $1 - \sqrt{2x+2} = \sqrt{2x-5} \quad /^2$ (jedna z podmínek: $x \geq \frac{5}{2}$)

$$4 = \sqrt{2x+2} \quad /^2$$

$$x = 7$$

zk.: $L \leftarrow 7 \Rightarrow 1 - \sqrt{16} = -3$ $P \leftarrow 7 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$ $L \neq P$

vzhledem ke zkoušce $K = 7$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

6) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = \frac{10}{\sqrt{x-5}}$ (jedna z podmínek: $x > 5$)

$$\begin{aligned} x-5 + \sqrt{x-5} &= 10 \\ \sqrt{x-5} &= 5-x \\ x &= 9 \end{aligned}$$

zk.: $L = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$ $P = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5$ $L = P$

vzhledem ke zkoušce $K = 9$

10) $\sqrt{x^2+1} \leq 3$ podmínka $x \in \mathbb{R}$
porovnání $+\leq+$ lze $/^2$

Pak řešíme $x^2+1 \leq 9$
 $|x| \leq 2\sqrt{2}$

$K = \langle -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} \rangle$

11) $\sqrt{3x-5} \leq \sqrt{x}$ podmínka: $x \geq \frac{5}{3}$
porovnání $+\leq+$ lze $/^2$

Pak řešíme $3x-5 \leq x$
 $x \leq \frac{5}{2}$

Vzhledem k podmínce $K = \langle \frac{5}{3}; \frac{5}{2} \rangle$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

12) $\sqrt{2x+3} \geq x$ podmínka: $x \geq -\frac{3}{2}$

porovnání

I pro $x < 0$ je $+\geq -$
platí pro $\forall x \in D \cap (-\infty; 0]$

II pro $x \geq 0$ je $+\geq +$ lze $/^2$

Pak řešíme $2x+3 \geq x^2$

$$0 \geq x^2 - 2x - 3$$

$$(-3; 1] \leq 0 \quad \text{takže} \quad x \in (-1; 3) \cap (0; +\infty]$$

Výsledné řešení...vše postupně znázorníme na číselnou osu



Výsledné řešení $K = \left(-\frac{3}{2}; 3\right)$

- Použité nákresy jsou vlastní s využitím programu Geogebra.
- CHARVÁT, Jura. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice. Dotisk* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-154-X.
- JANEČEK, František. *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-096-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost