



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2- 8-1-09
Anotace	Exponenciální rovnice - shrnutí učiva a samostatné procvičování.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	2. ročník vyššího gymnázia, 6.F, 19.12.2012, Matematika

Exponenciální rovnice - shrnutí

- neznámá je v exponentu mocniny
- budeme řešit vždy v $\mathbb{R}$
- exponenciální funkce je prostá, proto platí

$$\forall r, s \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : a^r = a^s \Leftrightarrow r = s$$

- **PAMATUJ :**

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

využívej grafy exp. funkcí

pravidla pro počítání s mocninami

$$\forall r, s \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}^+ : 1) a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$2) \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$3) (a^r)^s = a^{rs}$$

$$4) (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

I. Exp. rovnice (def., pravidla)

1) V R: $8 \cdot 2^x = \sqrt{16^x}$
 $2^{x+3} = 2^{4x \cdot \frac{1}{2}}$
 $x+3=2x$
 $x=3$
 $K = 3$

3) V R: $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x-1} = 50$
 $8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 50 \quad / \cdot 2$
 $2^x \cdot (6+8+1) = 50 \cdot 2$
 $2^x = \frac{100}{25}$
 $x=2$
 $K = 2$

2) V R: $0,1 \cdot 10^{2x} = \frac{\sqrt[3]{10}}{100^x}$
 $10^{2x-1} = 10^{\frac{1}{3}-2x}$
 $2x-1 = \frac{1}{3} - 2x$
 $4x = \frac{4}{3}$
 $x = \frac{1}{3}$
 $K = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

4) V R: $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$
 $3^x + 3 \cdot 3^x = 7 \cdot 4^x - 4 \cdot 4^x$
 $4 \cdot 3^x = 3 \cdot 4^x$
 $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$
 $x=1$
 $K = 1$

II. Exp. rovnice (substituce, kvadratická)

PAMATUJ:

$$9^x = 3^{2x} = 3^{2x} = 3^{2x}$$

5) V R: $9^x - 3^{x+1} = 3^x + 45$
 $3^{2x} - 3 \cdot 3^x = 3^x + 45$
 využít substituci $y = 3^x$

Pak má rovnice tvar $y^2 - 4y - 45 = 0$
 $y^2 - 9y + 5 = 0$
 $y_1 = 9 \vee y_2 = -5$

zpět k substituci $3^x = 3^2 \vee 3^x = -5$
 $x = 2 \vee x \in \emptyset$

$K = \{2\}$

III. Exp. rovnice (mocniny s různým základem)

6) V R: $10^x = 3$ *zlogaritmuje*

$$\log 10^x = \log 3$$

$$x \cdot \log 10 = \log 3$$

$$x = \log 3$$

$$K = \{ \log 3 \}$$

7) V R: $6^{x+2} = 2^{x+3}$ *nejdříve upravíme*

$$36 \cdot 6^x = 8 \cdot 2^x$$

$$\frac{6^x}{2^x} = \frac{8}{36}$$

$$3^x = \frac{2}{9} \quad \text{zlogaritmuje}$$

$$x \cdot \log_3 3 = \log_3 \frac{2}{9}$$

$$x = \log_3 \frac{2}{9} = \log_3 2 - 2$$

$$K = \{ \log_3 2 - 2 \}$$

Samostatná práce A

Řešte v R:

$$1. \quad 4^{x-1} \cdot \sqrt{2}^{2x+1} = 16^x \cdot \sqrt{2}$$

$$2. \quad 10^{2x-1} = 2^x \cdot 5^{x-1}$$

$$3. \quad 3^x - 2 \cdot 3^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 90$$

$$4. \quad x^{2+\log x} = 10^4 \cdot x^2$$

$$5. \quad \log_2 (0 \cdot 3^x) \geq \log_2 (4^x + 6) \geq 1$$

$$6. \quad 2^{3x} \cdot 5^{x-2} = 4^{x+1}$$

Zkontroluj si řešení a výsledky:

$$1. \quad \begin{aligned} 2^{2x-2+x+\frac{1}{2}} &= 2^{4x+\frac{1}{2}} \\ 3x - \frac{3}{2} &= 4x + \frac{1}{2} \\ x &= -2 \\ K &= \underline{-2} \end{aligned}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$\begin{aligned}
 2. \quad 10^{2x} \cdot \frac{1}{10} &= 10^x \cdot \frac{1}{5} \\
 10^{2x-x} &= \frac{10}{5} \\
 10^x &= 2 \quad \text{zlogaritmuje} \\
 x &= \log 2 \\
 K &= \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad 3^x - \frac{2}{3} \cdot 3^x + 3^x \cdot \frac{1}{27} &= 90 \quad / \cdot 27 \\
 3^x \cdot (27 - 18 + 1) &= 90 \cdot 27 \\
 3^x \cdot 10 &= 90 \cdot 27 \\
 3^x &= 3^{2+3} \\
 x &= 5 \\
 K &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \text{podmínka: } x > 0, \quad \text{zlogaritmuje} \\
 \log x + \log x + \log x &= \log 10^4 + 2 \log x \\
 \text{využít substituci } y &= \log x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Pak má rovnice tvar} \quad 2y + y^2 &= 4 + 2y \\
 y^2 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y - 2 \quad y + 2 &= 0 \\
 y = 2 \quad \vee \quad y &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{zpět k substituci} \quad \log x = 2 \quad \vee \quad \log x &= -2 \\
 x = 10^2 \quad \vee \quad x &= 10^{-2}
 \end{aligned}$$

$$K = 10,01$$

$$5. \quad \log_2 \frac{10 \cdot 3^x}{9^x + 6} = \log_2 2$$

$$\frac{10 \cdot 3^x}{9^x + 6} = 2$$

využít substituci $y = 3^x$

Pak má rovnice tvar $10y = 2(y^2 + 6) \quad | : \cdot \frac{1}{2}$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$(y - 2)(y - 3) = 0$$

$$y = 2 \quad \vee \quad y = 3$$

zpět k substituci $3^x = 2 \quad \vee \quad 3^x = 3$

$$x = \log_3 2 \quad \vee \quad x = 1$$

$$K = \frac{1}{2} \log_3 2$$

6. **nejdříve upravíme**

$$8^x \cdot 5^x \cdot \frac{1}{25} = 4^x \cdot 4$$

$$\frac{8^x \cdot 5^x}{4^x} = 25 \cdot 4$$

$$\left(\frac{8 \cdot 5}{4} \right)^x = 100$$

$$10^x = 10^2$$

$$x = 2$$

$$K = \frac{1}{4}$$

Samostatná práce B

Řešte v R:

1. $2^{2x} - 2^{x+4} = 2^x - 2^4$

2. $6^{x-3} \cdot 0,25^{x-1} = 3^{x-3}$

3. $x^{\log x - 2} - 1000 = 0$

4. $\log \sqrt{3x-5} + \log \sqrt{7x-3} = 1 + \log \frac{\sqrt{11}}{10}$

5. $\frac{\log x^2 + 7}{\log x + 7} = 1$

Zkontroluj si výsledky:

1. využít substituci $y = 2^x$

Pak má rovnice tvar $y^2 - 17y + 16 = 0$

$$(y - 16)(y - 1) = 0$$

zpět k substituci $2^x = 2^4 \quad \vee \quad 2^x = 2^0$

$$K = 40$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$2. \quad \left(\frac{6}{3 \cdot 4} \right)^x = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{4 \cdot 27}$$

$$2^{-x} = 2$$

$$K = \underline{\underline{-1}}$$

$$3. \quad (\log x - 2) \cdot \log x = \log 1000$$

využít substituci $y = \log x$

Pak má rovnice tvar $y^2 - 2y - 3 = 0$

$$(y - 3)(y + 1) = 0$$

zpět k substituci $\log x = 3 \quad \vee \quad \log x = -1$

$$K = \underline{\underline{100; 0,1}}$$

$$4. \quad \text{podmínka: } x > \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \log(x-5) + \frac{1}{2} \cdot \log(x-3) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \log 11 - 1 \quad / \cdot 2$$

$$\log(x-5) + \log(x-3) = \log 11$$

$$21x^2 - 44x + 4 = 0$$

$$x = \frac{9}{7} \quad \vee \quad x = \frac{17}{21}$$

$$K = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

$$5. \quad \text{podmínka: } x > 0$$

$$2 \cdot \log x + 7 = \log x + 7$$

$$\log x = 0$$

$$K = \underline{\underline{1}}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

- Všechny použité tabulky a schémata jsou vlastní.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. 3., upravené vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-164-7.
- JANEČEK, František. *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-096-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost