



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

|                                                     |                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Název školy                                         | Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291                                                                                              |
| Název a číslo OP                                    | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, <b>Název projektu:</b> Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249 |
| Název šablony klíčové aktivity                      | III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT                                                                                               |
| Tematická oblast (předmět)                          | MATEMATIKA                                                                                                                                      |
| Název sady vzdělávacích materiálů                   | ROVNICE A NEROVNICE                                                                                                                             |
| Jméno tvůrce vzdělávací sady                        | RNDr. Vlasta Chytrá                                                                                                                             |
| Číslo sady                                          | III/2-8-1-11                                                                                                                                    |
| Anotace                                             | Goniometrické rovnice I. – základní<br>Samostatná práce, procvičení učiva                                                                       |
| Ověřeno ve výuce:<br>ročník, třída, dne,<br>předmět | 2. ročník vyššího gymnázia, 6.F, 12.2.2013, Matematika                                                                                          |

## Goniometrické rovnice – základní

= neznámá je v argumentu goniometrické funkce

**Pozor** na definiční obor neznámé

- Řešte v  $R \dots K = \bigcup_{k \in Z} x_1 + k \cdot p, x_2 + k \cdot p, \dots$   
*nekonečné mnoho kořenů,  $p$  – perioda*
- Řešte v  $\langle 0; 2\pi \rangle$  (nebo jiný konkrétní interval)  $\dots K = x_1; x_2; \dots$   
*jednotlivé kořeny vyjmenovat*

**Využívat:**

- definice a vlastnosti funkcí (periodičnost, parita...)
- zakreslení v jednotkové kružnici
- grafy funkcí



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

## 1) Základní rovnice

- zadání
- jednotková kružnice
- řešení

$$Př. \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \cot g x = 1$$

## 2) Využití substitute

- složitější argument nahradit novou neznámou
- vyřešit základní rovnici
- vrátit se k substituci

$$Př. \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{substitute: } y = x - \frac{\pi}{6}$$

## 3) Součinné tvary

**POZOR!!**

- nedělit rovnici tvary s neznámou
- vše převést na jednu stranu rovnice
- vytýkat společné členy
- řešit rovnici v součinném tvaru

$$Př. \quad \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

**Zadání**    **A Řešte v  $\mathbb{R}$ :**                      **B Řešte v  $\langle -\pi; 2\pi \rangle$ :**

1.  $\sin x = \frac{1}{2}$

7.  $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

2.  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.  $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

3.  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

9.  $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

4.  $\cot g x = 1$

10.  $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$

5.  $\sin x = -1$

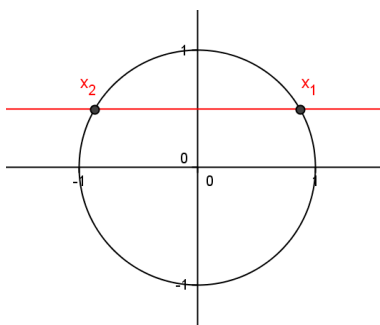
11.  $2\sin x \cdot \cot g 3x + \cot g 3x = 0$

6.  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12.  $\cos 2x \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \cdot \cos 2x$

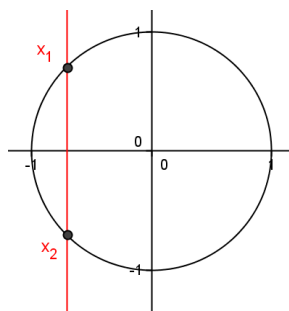
**ŘEŠENÍ A** 1)

1.  $\sin x = \frac{1}{2}$



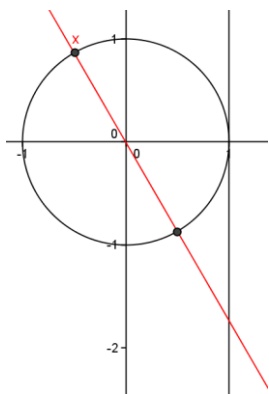
$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

2.  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



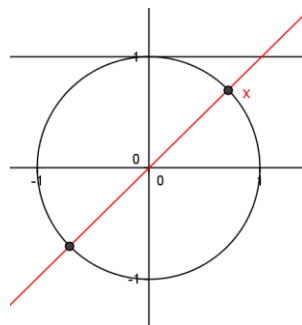
$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

3.  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$



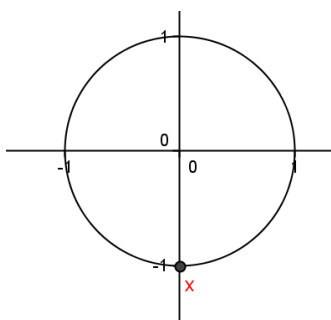
$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}$$

4.  $\cot g x = 1$



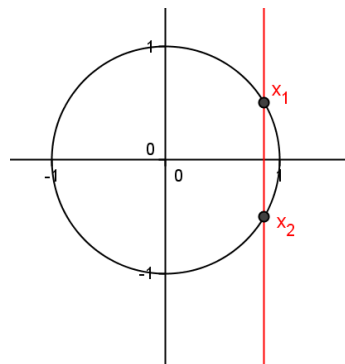
$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

5.  $\sin x = -1$



$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

6.  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

## VÝSLEDKY B

1.  $K = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

2.  $K = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$

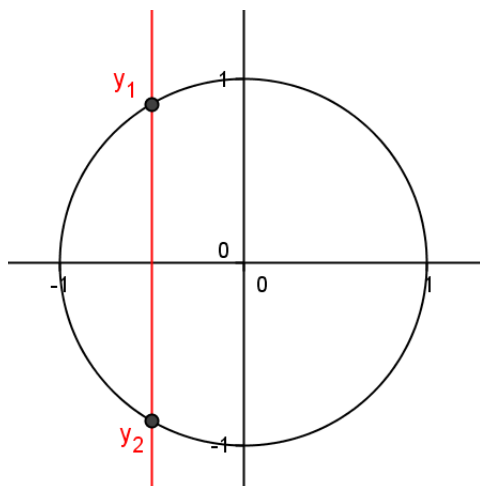
3.  $K = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$

4.  $K = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$

5.  $K = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$

6.  $K = \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

2) 7.  $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$      *subst.*  $y = x - \frac{\pi}{6}$



$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x_1 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

**A**  $K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

**B**  $K = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}$

$$8. \quad \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$$

$$\text{subst. } y = 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\text{A} \quad \underline{K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \right\}}$$

$$\text{B} \quad \underline{K = \left\{ -\frac{23\pi}{24}; -\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}; \frac{25\pi}{24}; \frac{37\pi}{24} \right\}}$$

$$9. \quad \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\text{subst. } y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\text{A} \quad \underline{K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\}}$$

$$\text{B} \quad \underline{K = \left\{ \frac{2}{3}\pi \right\}}$$

$$3) \quad 10. \quad \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} x \cdot (\sin 2x - 1) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \vee \quad \sin 2x = 1$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$A \quad \underline{K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k\pi \right\}}$$

$$B \quad \underline{K = \left\{ -\pi; -\frac{3\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \pi; 2\pi; \right\}}$$

$$11. \quad 2 \sin x \cdot \cot g 3x + \cot g 3x = 0 \quad \left( x \neq k \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\cot g 3x \cdot (\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cot g 3x = 0$$



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

$$\text{A} \quad K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\text{B} \quad K = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

$$12. \quad \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \cdot \cos 2x \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\cos 2x \cdot (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\text{A} \quad K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$$

$$\text{B} \quad K = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

- Použité nákresy jsou vlastní sestrojené v programu GeoGebra.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie. Dotisk 3. vydání.* Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-203-1.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.