



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2-8-1-12
Anotace	Goniometrické rovnice II. – složitější Procvičení učiva, samostatná práce ve dvojicích
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	2. ročník vyššího gymnázia, 6.F, 27.2.2013, Matematika

Goniometrické rovnice – složitější

Stále platí:

- Čti pozorně zadání
- Pozor na definiční obor neznámé
- Nezapomeň na podmínky neznámé

Využívat:

- Definice a vlastnosti funkcí (periodičnost, parita...)

- **Vzorce:**

základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \cot x = 1$$

pro dvojnásobný úhel

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

další goniometrické vzorce (máš přehled)

- Substituce (např. vede ke kvadratické rovnici)
- Součinné tvary
- Základní rovnice na závěr - zakreslení v jednotkové kružnici



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Samostatná práce – procvičování

A Řešte v $\mathbb{R}$: **B Řešte v $\langle 0; 2\pi \rangle$:**

1. $(\cos x - 1) \cos x = 1$
2. $5 - 7 \sin x = 2 \cos^2 x$
3. $3 + 2 \operatorname{tg} x = 5 \cot x$
4. $2 \cos^2 x = \cot x$
5. $\sin^4 x - \cos^4 x = -1$
6. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \operatorname{tg}^2 x - 1$
7. $\sin 2x + \cos x = 0$
8. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$
9. $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 - \cot x$
10. $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

1) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$$D = 1 + 8 = 9 \quad \cos x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\cos x = 1 \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\} \quad K = \left\{ 0; 2\pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$$

2) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$

$$D = 49 - 24 = 25 \quad \sin x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$\sin x = 3 \quad \vee \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\} \quad K = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$$3) \quad 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 5 = 0 \quad x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$D = 9 + 40 = 49 \quad \operatorname{tg} x = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; 0,62\pi + k\pi \right\} \quad K = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; 0,62\pi; 1,62\pi \right\}$$

$$4) \quad 2\cos^2 x \cdot \sin x - \cos x = 0 \quad x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x \neq 0 \quad \cos x \cdot \sin x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad \sin 2x = 1$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \quad K = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$5) \quad (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

$$\cos 2x = 1$$

$$2x = 2k\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k\pi \quad K = \{0; \pi; 2\pi\}$$

6) $2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 x - 1$
 $\operatorname{tg}^2 x = 3$
 $|\operatorname{tg} x| = \sqrt{3}$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

7) $2 \sin x \cdot \cos x + \cos x = 0$
 $\cos x (\sin x + 1) = 0$
 $\cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2}$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

8) $2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{1}{2}$
 $\cos x = \frac{1}{2}$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

9) $1 = \sin^2 x - \cos x \cdot \sin x$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$1 = 1 - \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x$$

$$0 = \cos x (\cos x + \sin x)$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad \cot x = -1$$

$$\sin x = -\cos x$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\}$$

$$K = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$

10) $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

subst. $y = \frac{x}{2}$

$$\sin y + \cos 2y = 1$$

$$\sin y + \cos^2 y - \sin^2 y = 1$$

$$\sin y - 2\sin^2 y = 0$$

$$\sin y (-2\sin y) = 0$$

$$\sin y = 0 \quad \vee \quad \sin y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = k\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 4k\pi; \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \right\}$$

$$K = \left\{ 0; 2\pi; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

DÚ:

Vyřeš v R : a) $\ast \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

b) $\ast 2 - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \cos x$

Uprav: a) $\frac{2\operatorname{tg} x}{\sin 2x} - \operatorname{tg}^2 x$ b) $\frac{2}{\sin 2x} - \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

- Použité nákresy jsou vlastní sestrojené v programu GeoGebra.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie. Dotisk 3. vydání.* Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-203-1.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- KUBÁT, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce k přijímacím zkouškám na VŠ.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-298-4.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

