



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2- 8-1-13
Anotace	Užití substituce při řešení rovnic a nerovnic - shrnutí učiva a samostatné procvičování.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 3.A,B, 7.E, 31.5.2013, Matematický seminář

Užití metody substituce při řešení různých typů rovnic a jejich soustav

- neznámá je ve složitějším tvaru
(např. v argumentu goniometrické funkce, logaritmu, ve jmenovateli zlomku, pod odmocninou,...)
- opakuje se složitější tvar, v kterém je neznámá
- budeme řešit v $\mathbb{R}$, také v $\mathbb{C}$
- pozor na definiční obor proměnné
- pozor na nutnost zkoušky v případě neekvivalentních úprav



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Samostatná práce - zadání

1) $\forall R: x^4 - 7x^2 - 44 = 0$ (rovnice bikvadratická)

2) $\forall R: (x^2 - 4x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 1) = 18$

3) $\forall R: \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)^2 - \frac{4x^2 + 4}{x} = 12$

4) $\forall R: \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 2} + 4 \right) \cdot \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 2} - 3 \right) + 6 = 0$

5) $\forall R: \sqrt{3x^2 + 2x} + \sqrt{3x^2 + 2x + 3} = \sqrt{3x^2 + 2x + 8}$

6) $\forall R: 4^{x+1} - 65 \cdot 2^x + 16 = 0$

7) $\forall \langle 0, 2\pi \rangle: \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

8) $\text{Pro } x, y, z \in R: \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \wedge \frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 4 \wedge \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 0$

9) $\text{Pro } x, y \in R: \frac{2}{x+y} - \frac{5}{x-y} = 1 \wedge \frac{1}{x+y} + \frac{4}{x-y} = \frac{9}{5}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

10) Pro $x, y \in \mathbb{R}$: $|x-2| - |y+1| = 1 \wedge 3|x-2| + 2|y+1| = 13$

11) V $\mathbb{C}$: $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

Zapiš kořeny v algebraickém tvaru a zakresli je do Gaussovy roviny

12) V $\mathbb{C}$: $z + 2\bar{z} = -64$

Zapiš kořeny v algebraickém tvaru a zakresli je do Gaussovy roviny

Zkontroluj si řešení:

1) V $\mathbb{R}$: $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$

Ize využít substituci $a = x^2$ nebo rovnou rozložit

$$(x^2 - 11)(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 = 11 \quad \vee \quad x^2 = -4$$

$$|x| = \sqrt{11} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$K = \{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\}$$

2) V $\mathbb{R}$: $(x^2 - 4x - 2)(x^2 - 4x + 1) = 18$

využít substituci $a = x^2 - 4x$

$$a^2 - a - 20 = 0$$

$$(a - 5)(a + 4) = 0$$

$$a = 5 \quad \vee \quad a = -4$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0 \quad \vee \quad (x - 2)^2 = 0$$

$$K = \{-1; 2; 5\}$$

3) V $\mathbb{R}$: $\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 - \frac{4x^2 + 4}{x} = 12$

využít substituci $a = \frac{x^2 + 1}{x}$ podmínka $x \neq 0$

$$a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a - 6)(a + 2) = 0$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x} &= 6 \quad \vee \quad \frac{x^2+1}{x} = -2 \\ x^2 - 6x + 1 &= 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \\ D &= 32 \quad \Delta + 1 \sqrt{} = 0 \\ x_{1,2} &= 3 \pm 2\sqrt{2} \quad \vee \quad x_3 = -1 \\ K &= \underline{\underline{\{1; 3+2\sqrt{2}; 3-2\sqrt{2}\}}}\end{aligned}$$

4) V R: $\left(\frac{x^2+5}{x^2-2} + 4\right) \cdot \left(\frac{x^2+5}{x^2-2} - 3\right) + 6 = 0$

využít substituci $a = \frac{x^2+5}{x^2-2}$ podmínka $x \neq \pm\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}a^2 + a - 6 &= 0 \\ (a-2)(a+3) &= 0 \\ \frac{x^2+5}{x^2-2} &= 2 \quad \vee \quad \frac{x^2+5}{x^2-2} = -3 \\ x^2 &= 9 \quad \vee \quad 4x^2 = 1 \\ |x| &= 3 \quad \vee \quad |x| = \frac{1}{2} \\ K &= \underline{\underline{\left\{-3; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 3\right\}}}\end{aligned}$$

5) V R: $\sqrt{3x^2+2x} + \sqrt{3x^2+2x+3} = \sqrt{3x^2+2x+8}$

využít substituci $a = 3x^2 + 2x$

podmínka $a \geq 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x \geq 0$, takže $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left\langle 0; +\infty \right\rangle$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3} = \sqrt{a+8}$$

$$4a^2 + 3a = 6 - a$$

$$3a^2 + 22a - 25 = 0$$

$$D = 784$$

$$a_{1,2} = \frac{-22 \pm 28}{6}$$

$$a_1 = 1 \quad \vee \quad a_2 = -\frac{25}{3} \notin D$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad K = \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$$

6) $\forall \mathbb{R}: 4^{x+1} - 65 \cdot 2^x + 16 = 0$

využít substituci $a = 2^x$

$$4a^2 - 65a + 16 = 0$$

$$D = 3969$$

$$a_{1,2} = \frac{65 \pm 63}{8}$$

$$a_1 = 16 \quad \vee \quad a_2 = \frac{1}{4}$$

$$2^x = 2^4 \quad \vee \quad 2^x = 2^{-2}$$

$$K = \left[-\frac{1}{4}; 4\right]$$

7) $\forall \langle 0, 2\pi \rangle: \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

využít substituci $a = 2x - \frac{\pi}{6}$

$$\sin a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$K = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$

8) Pro $x, y, z \in R$: $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \quad \wedge \quad \frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 4 \quad \wedge \quad \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 0$

využít substituci $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$

podmínky $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$

$$a = \frac{1}{2} \wedge b = \frac{1}{3} \wedge c = 1$$

$$K = \left\{ \frac{1}{2}; 3; 1 \right\}$$

9) Pro $x, y \in R$: $\frac{2}{x+y} - \frac{5}{x-y} = 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{x+y} + \frac{4}{x-y} = \frac{9}{5}$

využít substituci $a = \frac{1}{x+y} \wedge b = \frac{1}{x-y}$ podmínky $x \neq \pm y$

$$2a - 5b = 1$$

$$a + 4b = \frac{9}{5} \quad \left\{ a; b \right\} = \left[1; \frac{1}{5} \right]$$

$$x + y = 1$$

$$x - y = 5$$

$$K = \left\{ \frac{1}{2}; -2 \right\}$$

10) Pro $x, y \in \mathbb{R}$: $|x-2| - |y+1| = 1 \wedge 3|x-2| + 2|y+1| = 13$

využít substituci $a = |x-2| \wedge b = |y+1|$

$$|x-2| = 3 \wedge |y+1| = 2$$

$$x \in \{1; 5\} \wedge y \in \{3; 1\}$$

$$K = \{1; -3, 1; 1, 1; -3, 1; 1\}$$

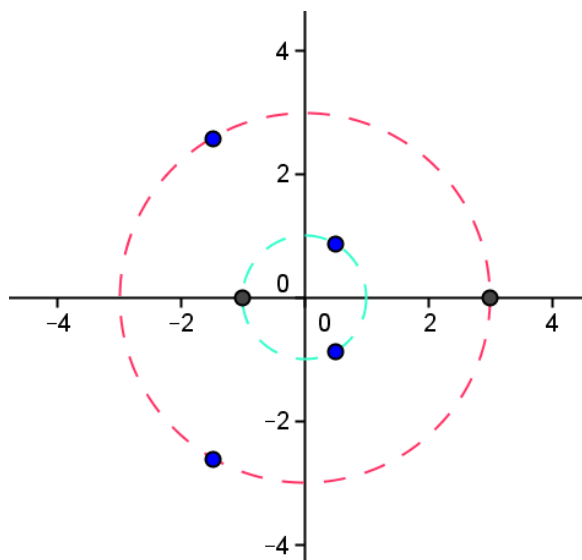
11) V $\mathbb{C}$: $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

lze využít substituci $z = x^3$ nebo rovnou rozložit

$$(x^3 - 27)(x^3 + 1) = 0 \quad \text{řešíme binomické rovnice}$$

$$x^3 = 27 \vee x^3 = -1$$

$$K = \left\{ 3; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$



12) V C: $z + 2z^3 = -64$

využít substituci $z = x + 2$

řešíme binomickou rovnici $z^3 = -64$

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

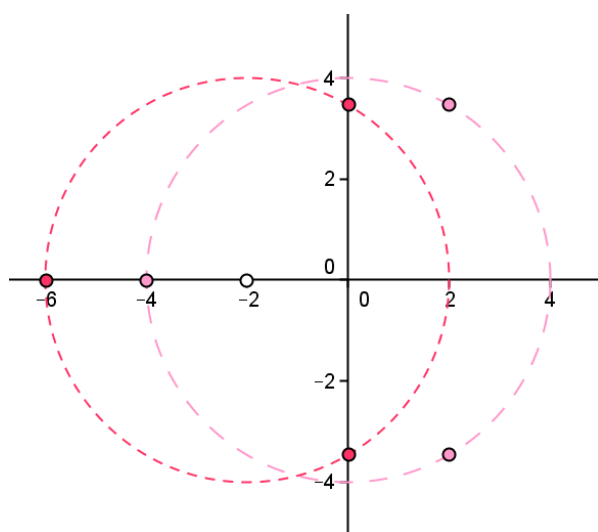
$$x_1 = 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = -4$$

$$x_2 = -6$$

$$z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$$

$$x_3 = -2\sqrt{3}i$$



$K = 2\sqrt{3}i; -6; -2\sqrt{3}i$

- Použité nákresy jsou vlastní s využitím programu Geogebra.
- CHARVÁT, Jura. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice. Dotisk* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-154-X.
- JANEČEK, František. *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-096-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.