



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2- 8-1-15
Anotace	Písemná práce (dvě varianty) – rovnice a nerovnice řešené v oboru komplexních čísel, včetně řešení. Pomůcky: rýsovací potřeby. Předpokládaný čas vypracování 40 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 3.A, 19.10.2012, Matematika

ZADÁNÍ

SKUPINA A

1. Vyřešte v $\mathbb{C}$, kořeny запиšte v algebraickém tvaru, řešení zakreslete do Gaussovy roviny:

a) $x^2 + 2 - 2\sqrt{3}i = 0$

b) $x^4 = -1$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

2. Vyřešte v $\mathbb{C}$: a) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

b) $(z^2 - 4i)(z^2 + 25) = 0$

3. Vyřešte v $\mathbb{C}$: $(z + 3i)z = 3i \cdot \bar{z} + 1 + i$

4. Vyberte si jeden příklad (A nebo B):

A) Vyřešte graficky nerovnici v $\mathbb{C}$: $|z - 2 + 3i| \geq |1 + \sqrt{3}i|$

B) Sestavte alespoň jednu kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, je-li jeden její kořen $x_1 = \frac{4i}{1-i}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ

SKUPINA B

1. Vyřešte v $\mathbb{C}$, kořeny запиšte v algebraickém tvaru, řešení zakreslete do Gaussovy roviny:

a) $x^4 = -1$

b) $x^2 - 2 + 2\sqrt{3}i = 0$

c) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

2. Vyřešte v $\mathbb{C}$: a) $4x^2 + 8x + 5 = 0$

b) $(z^2 + 4i)(\bar{z}^2 + 9) = 0$

3. Vyřešte v $\mathbb{C}$: $3i \cdot \bar{z} + 1 + i = (1 + 3i)z$

4. Vyberte si jeden příklad (A nebo B):

A) Vyřešte graficky nerovnici v $\mathbb{C}$: $|z - 3 + 2i| \geq |\sqrt{3} + i|$

B) Sestavte alespoň jednu kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, je-li jeden její kořen $x_1 = \frac{10i}{1 + 3i}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

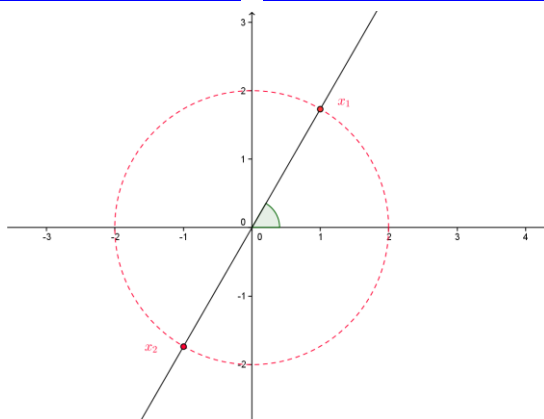
ŘEŠENÍ

SKUPINA A

1. a) $x^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ $a = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$r = \sqrt{4} = 2 \wedge \varphi = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \{0, 1\}$ takže

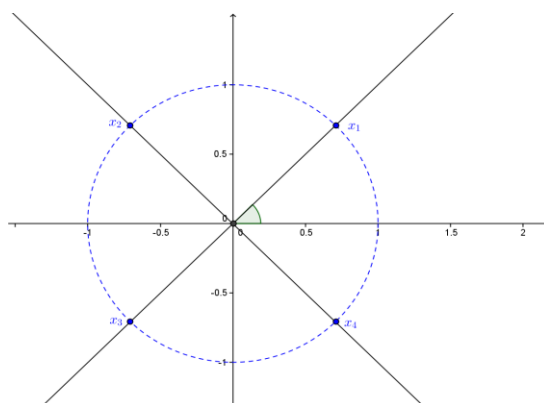
$x_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$; $x_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i$



b) $x^4 = 1$ $\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$

$r = 1 \wedge \varphi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

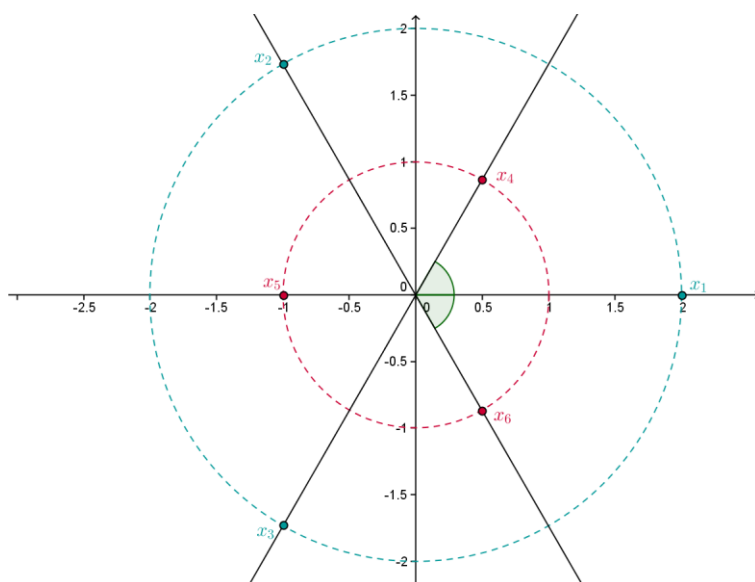


c) substitute: $x^3 = z$ **rce má tvar** $z^2 - 7z - 8 = 0$
 $(z - 8)(z + 1) = 0$

řešíme 2 binomické rovnice $x^3 = 8 \vee x^3 = -1$

$$x_1 = 2, x_2 = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -1 + \sqrt{3}i, x_3 = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$x_4 = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, x_5 = -1, x_6 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



2. a) $D = 64 - 80 = -16$

$$x_{12} = \frac{8 \pm 4i}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}i$$

$$K = \underline{\underline{1 \pm 0,5i; 1 - 0,5i}}$$

b) $x^2 = 4i \vee x^2 = -25$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, x_2 = -x_1, x_3 = 5i, x_4 = -5i$$

$$K = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, 5i, -5i}}$$

3. $(-3i)(a+bi) = 3i(-b+ai) + 1 - i$

$2a - 3ai + 2bi + 3b = 3ai + 3b + 1 - i$ z rovnosti kompl. čísel plyne

$2a + 3b = 3b + 1 \wedge -3a + 2b = 3a - 1$

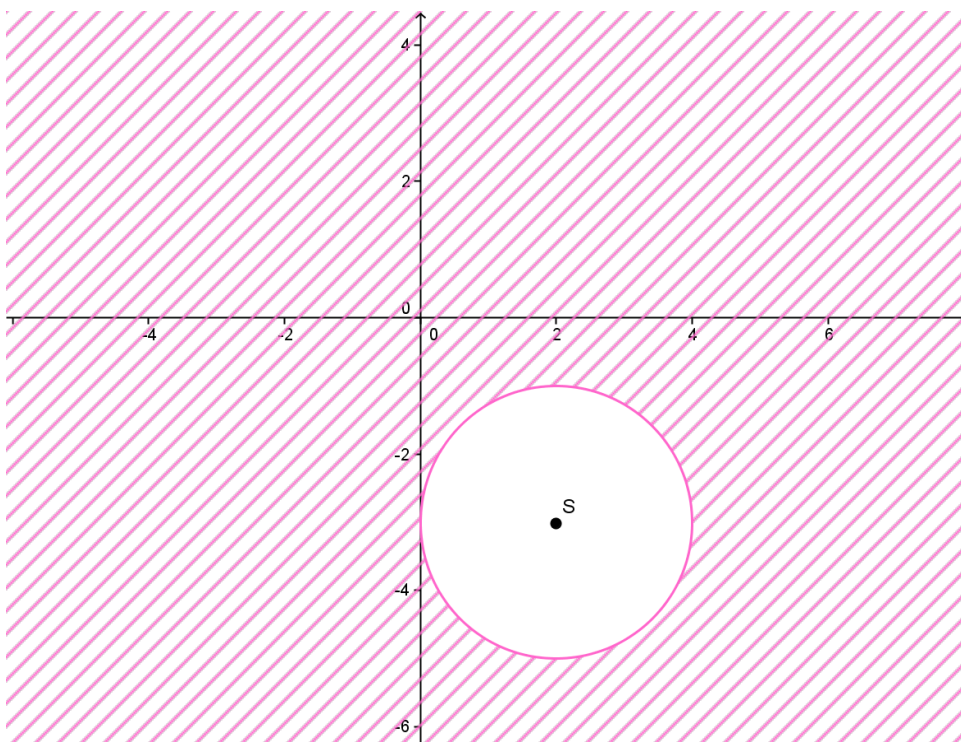
$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1; 2 = 1$

$z = \frac{1}{2} + i$

$K = \left\{ \frac{1}{2} + i \right\}$

4. A

$|x - (-3i)| \geq 2 \Rightarrow S[-3i; r=2]$



4. B $x_1 = \frac{4i}{1-i} = \frac{4i(1+i)}{1-i^2} = -2 + 2i \Rightarrow x_2 = -2 - 2i$

$a \in R - \{0\} \mid a(-2 + 2i)(-2 - 2i) = 0$

$a^2 + 4x + 8 = 0$

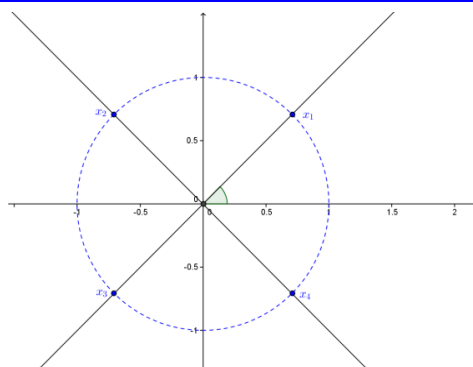
ŘEŠENÍ

SKUPINA B

1. a) $x^4 = 1 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right)$

$$r = 1 \wedge \varphi = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

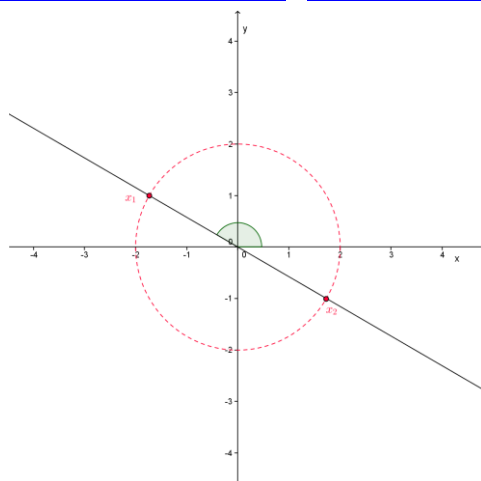
$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



b) $x^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ $a = 4 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$

$$r = \sqrt{4} = 2 \wedge \varphi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi, k \in \{0, 1\} \text{ takže}$$

$$x_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) = -\sqrt{3} + i; \quad x_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) = \sqrt{3} - i$$



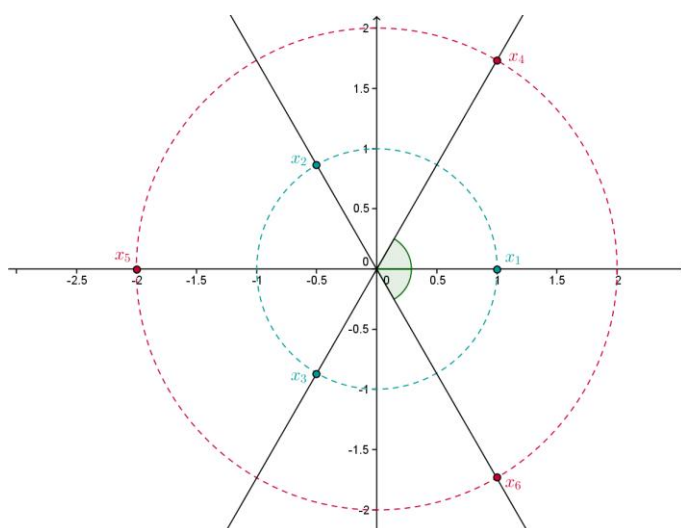
c) **substitute:** $x^3 = z$ **rce má tvar** $z^2 + 7z - 8 = 0$

$$(z+8)(z-1) = 0$$

řešíme 2 binomické rovnice $x^3 = -8 \vee x^3 = 1$

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, x_3 = 1 \left(\cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x_4 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3} i, x_5 = -2, x_6 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3} i$$



2. a) $D = 64 - 80 = -16$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4i}{8} = -1 \pm \frac{1}{2} i$$

$$K = \underline{\underline{\{1 + 0,5i; -1 - 0,5i\}}}$$

b) $x^2 = -4i \vee x^2 = -9$

$$x_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i, x_2 = -x_1, x_3 = 3i, x_4 = -3i$$

$$K = \underline{\underline{\{\sqrt{2} + \sqrt{2} i, \sqrt{2} - \sqrt{2} i, 3i, -3i\}}}}$$

3. $3i \cdot (a - bi) + 1 - i = (2 - 3i) \cdot (a + bi)$

$3ai + 3b + 1 - i = 2a - 3ai + 2bi + 3b$ z rovnosti kompl.čísel plyne.

$3b + 1 = 2a + 3b \wedge 3a - 1 = -3a + 2b$

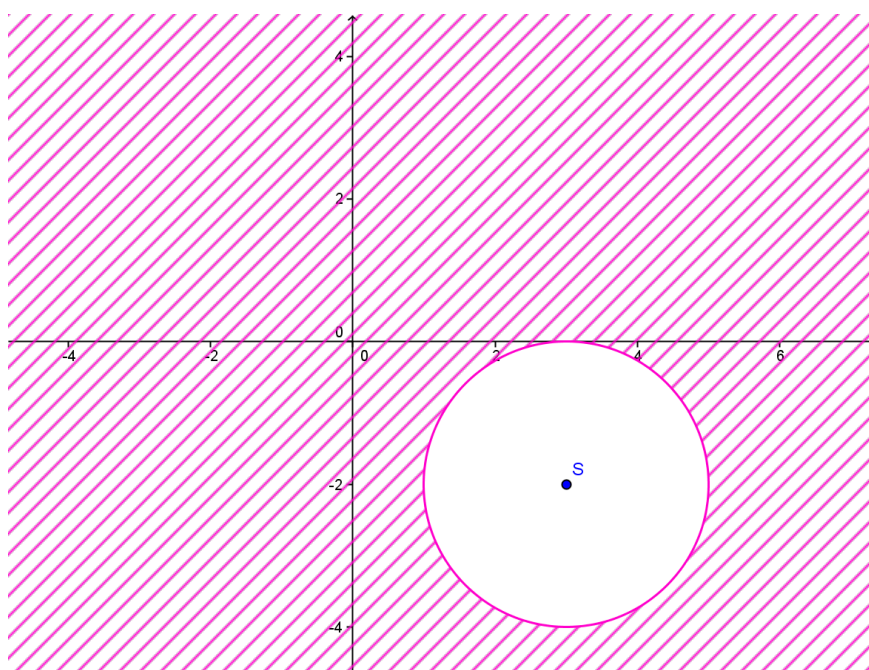
$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1; 2 = 1$

$z = \frac{1}{2} + i$

$K = \left\{ \frac{1}{2} + i \right\}$

4. A

$|x - 3 - 2i| \geq 2 \Rightarrow S = \{z \mid |z - 3 - 2i| \geq 2\}$



4. B $x_1 = \frac{10i}{1+3i} = \frac{10i(-3i)}{1-9i^2} = 3+i \Rightarrow x_2 = 3-i$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid a(3-i)(3+i) = 0$

$a(x^2 - 6x + 10) = 0$

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programu GeoGebra.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-187-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.