



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2- 8-1-14
Anotace	Reciproké rovnice - shrnutí učiva a samostatná práce v semináři ve dvojicích.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 3.A,B, 7.E, 3.12.2012, Matematický seminář

Reciproké rovnice - shrnutí

- budeme řešit vždy v $\mathbb{C}$
- mají tvar
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

(kde koeficienty a_i jsou reálná nenulová čísla)
- pro koeficienty platí
$$a_i = a_{n-i} \quad \vee \quad a_i = -a_{n-i}$$
- rovnice má n kořenů
- pro kořeny platí: ty, které jsou ve dvojici, jsou navzájem **převrácená čísla**
- je-li n **liché**, je vždy al. jeden kořen roven **1** nebo **-1**
- postup ukážeme... pro n -lichá (3,5)
... pro n -sudá (2- kvadr. rce-umíme,4)



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

A. Rec. rovnice pro n liché

pro $a_i = a_{n-i}$ (sobě odpovídající koef. mají stejné znaménko)

je jeden kořen roven **-1**

pro $a_i = -a_{n-i}$ (sobě odpovídající koef. mají opačné znaménko) je jeden kořen roven **1**

$$n=3$$

1) V C: $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

vytknout stejné koef.

$$2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 0 \quad \text{zopakuj si rozklad podle vzorců } A^3 + B^3, A^3 - B^3$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) = 0 \quad V : \text{součin je roven } 0 \quad \dots\dots$$

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (\text{všimni si - je opět reciproká kvadr.})$$

a dokončíme jednoduché rovnice

$$K = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

Podobně vyřeš:

2) V C: $5x^3 + 21x^2 - 21x - 5 = 0$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

B. Rec. rovnice pro n sudé

n=2

kvadratická

3) V C: $3x^2 - 10x + 3 = 0$

$D = 100 - 36 = 64$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{matrix} \quad K = \left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}$$

n=4

4) V C: $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$

vytknout opět stejné koef.

$5(x^4 + 1) - 26(x^3 + x) + 10x^2 = 0$

kořenem jistě není $x=0$, takže celou rovnici lze **vydělit x^2**

$5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 26\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$

využít substituci $y = x + \frac{1}{x}$, tedy $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Pak má rovnice tvar $5y^2 - 26y + 10 = 0$

$5y^2 - 26y = 0$

$y(5y - 26) = 0$

Zpět k substituci $x + \frac{1}{x} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

Dokončíme řešení dvou kvadr. rovnic v C (všimni si - jsou opět reciproké)

$x^2 + 1 = 0 \quad \vee \quad 5x^2 - 26x + 5 = 0$

$K = \left\{ -i; i; \frac{1}{5}; 5 \right\}$

Podobně vyřeš:

5) V C: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

evropský
sociální
fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVYOP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

A. Rec. rovnice pro n liché

$$\boxed{n=5}$$

6) V C: $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$

Postup:

- 1 kořen je $x=-1$ nebo $x=1$, takže mnohočlen na L straně rovnice vydělit dvojčlenem $(x+1)$ nebo $(x-1)$
- tak získáme rovnici 4.stupně (je reciproká)
- vytknout stejné koeficienty z dvojic členů a celou rovnici vydělit x^2
- využít substituci $y = x + \frac{1}{x}$ a vyřešit kvadratickou rovnici pro y
- vrátit se k substituci a vyřešit dvě jednoduché kvadratické rovnice pro x (jsou opět reciproké)

$$(4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4) : (x+1) = 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4$$

$$x_1 = -1$$

$$4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x^2 = 0$$

$$\text{subst. } y = x + \frac{1}{x} \quad 4y^2 + 8y - 5 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm 12}{8} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Zpět k } x: \quad x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2 - x + 2 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$K = \left\{ -1; \frac{1+i\sqrt{15}}{4}; \frac{1-i\sqrt{15}}{4}; -2; -\frac{1}{2} \right\}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Podobně vyřeš:

7) V $\mathbb{C}$: $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$

Zkontroluj si výsledky:

2) $K = \left\{1; -\frac{1}{5}; -5\right\}$

5) $K = \left\{\frac{1}{3}; 3; -\frac{1}{2}; -2\right\}$

7) $K = \left\{-1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$

Samostatná písemná práce MS III

Rovnice s parametrem a reciproké rovnice

1. Vyřeš rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a parametrem $m \in \mathbb{R}$ (úplná diskuze)

a) $m^2 - 1 \geq 3mx - 3$

b) $\frac{x-m}{x+1} = m$

c) $|x+2| = m-3$

2. Urči, pro které hodnoty parametru $m \in \mathbb{R}$ má rovnice právě 1 reálný kořen a vypočítej ho:

$$mx^2 + 2mx = 2x - 1 - m$$

3. Vyřeš reciproké rovnice v $\mathbb{C}$:

a) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

b) $6x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$

Zkontroluj si výsledky:

Řešení

1.a) $m^2 - 1 = 3(x - 3)$

$$x \cdot m \cdot (m - 3) = m^2 - 9$$

Závěr:

parametr $m \in R$	množina řešení $K=$
$m = 3$	R
$m = 0$	$\emptyset$
$m \in R \setminus \{0, 3\}$	$\left\{ \frac{m+3}{m} \right\}$

1.b) $\frac{x-m}{x+1} = m \quad x \neq -1$

$$x \cdot (-m) = 2m$$

Závěr:

parametr $m \in R$	množina řešení $K=$
$m \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$	$\emptyset$
$m \in R \setminus \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$	$\left\{ \frac{2m}{1-m} \right\}$

1.c) $|x+2| = m-3$

parametr $m \in R$	množina řešení $K=$
$m = 3$	$\{2\}$
$m \in (-\infty; 3)$	$\emptyset$
$m \in [5; +\infty)$	$\{m; m-5\}$

$$2. \quad mx^2 + 2mx = 2x - 1 - m$$

$$mx^2 + (2m - 2)x + 1 + m = 0$$

$$a) \quad m = 0 \Rightarrow \text{lin. rce - vyřešit} \quad -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$b) \quad m \neq 0 \Rightarrow \text{kvadr. rce} \quad D = 4m^2 - 8m + 4 - 4m - 4m^2 = 4 - 12m$$

$$D=0 \dots \text{pro } m = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = -2$$

Rovnice má 1 kořen:

parametr $m \in R$	množina řešení $K =$
$m = \frac{1}{3}$	$\left\{ \frac{1}{2} \right\}$
$m = 0$	$\left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$$3.a) \quad 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$K = \left\{ 1; \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

$$3.b) \quad 6x^4 + 17x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$$

$$6y^2 + 17y + 5 = 0 \quad y_{1,2} = \frac{-17 \pm 13}{12} \quad y_1 = -\frac{1}{3} \quad y_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Zpět k substituci} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

Dokončíme řešení dvou kvadr. rovnic v C

$$3x^2 + x + 3 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$K = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{35}}{6}; \frac{1 - i\sqrt{35}}{6}; -2; -\frac{1}{2} \right\}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

- **Všechny použité tabulky a schémata jsou vlastní.**
- CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF, Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-154-X.
- JANEČEK, František. *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-096-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.