



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2- 8-1-17
Anotace	Pracovní list - řešení binomických rovnic, včetně řešení. Povolené pomůcky: kalkulačka. Předpokládaný čas vypracování 20 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 7.E, 12.10.2012, Matematika

ZADÁNÍ

Příklad 1.

Určete kořeny binomické rovnice $x^3 = -27i$. Zakreslete je do Gaussovy roviny. Výsledky запиšte v goniometrickém i algebraickém tvaru.

Příklad 2.

Řešte rovnici s neznámou $z \in \mathbb{C}$. Výsledky запиšte v goniometrickém tvaru. $(iz)^4 + \sqrt{3} - i = 0$

Příklad 3.

Vyřešte následující binomickou rovnici $z^6 = -64$. Zakreslete řešení do Gaussovy roviny. Výsledky запиšte v goniometrickém i algebraickém tvaru.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

Příklad 1.

Je-li $x = |x| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a zároveň zapíšeme-li i číslo $a = -27i$ v goniometrickém tvaru $a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, máme:

$|x|^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = |-27i| \cdot (\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2)$, odtud z rovnosti dvou čísel v goniometrickém tvaru dostáváme

$|x|^3 = |a|$ a zároveň $3\varphi = 3\pi/2 + 2k\pi$, kde $k = 0, \dots, 2$. Dostáváme, že

$$|z| = \sqrt[3]{|a|}, \text{ tedy } |z| = \sqrt[3]{|-27i|} \text{ a zároveň } \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{3}, \text{ tedy}$$

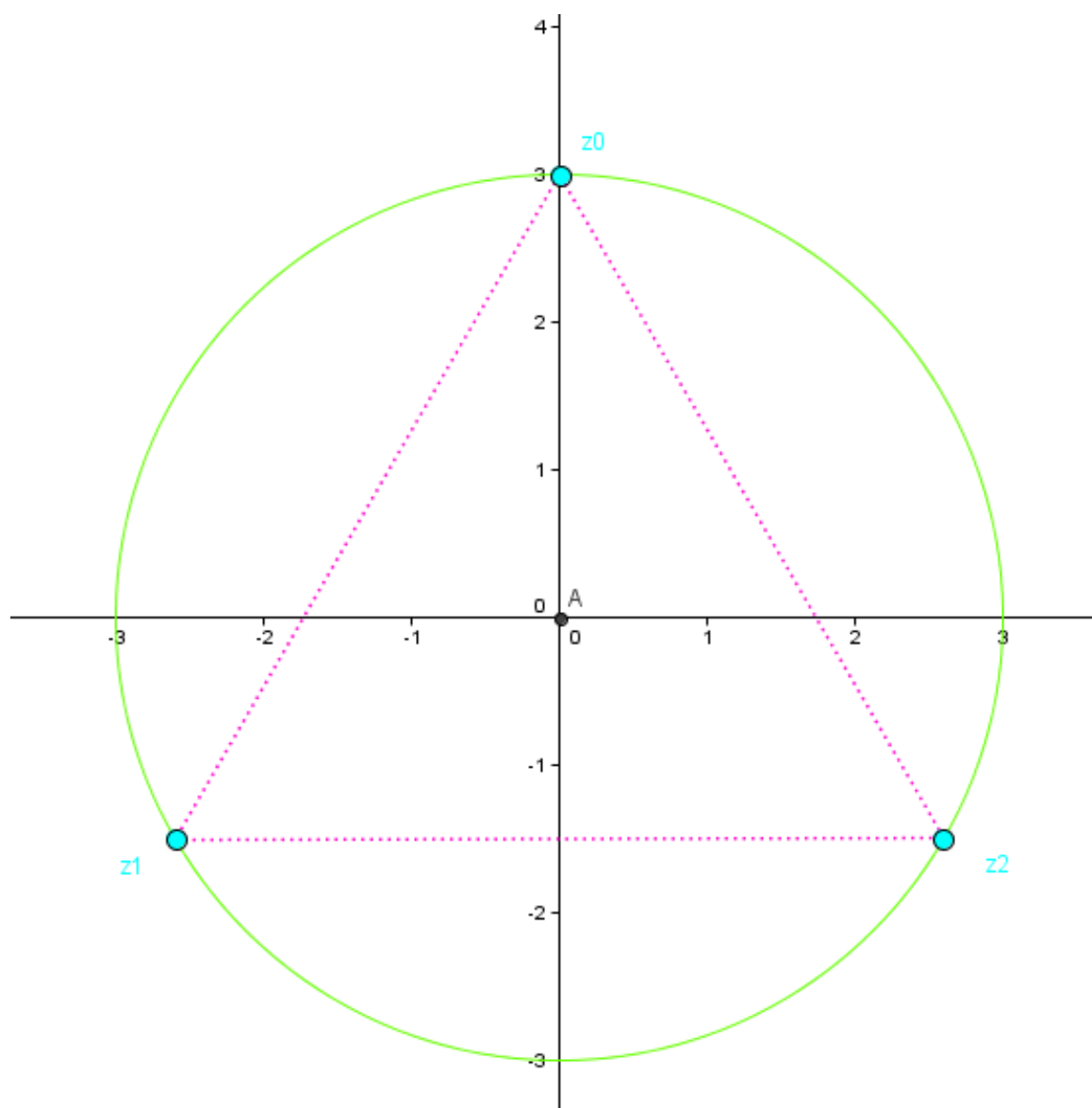
$$\varphi = \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}.$$

$$z_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3 \cdot (0 + 1i) = 3i$$

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

Kořeny této binomické rovnice leží na kružnici o poloměru $r = 3$ a tvoří vrcholy pravidelného trojúhelníka.



Příklad 2.

Nejprve upravíme rovnici $(iz)^4 + \sqrt{3} - i = 0$ na tvar $z^n = a$, tedy

$z^4 = -\sqrt{3} + i$. Je-li $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a zároveň zapíšeme-li i číslo

$a = -\sqrt{3} + i$ v goniometrickém tvaru $a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, máme:

$|z|^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) = |-\sqrt{3} + i| (\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6)$, odtud z rovnosti dvou čísel v goniometrickém tvaru dostáváme

$|z|^4 = |a|$ a zároveň $4\varphi = 5\pi/6 + 2k\pi$, kde $k = 0, \dots, 3$. Dostáváme, že

$$|z| = \sqrt[4]{|a|}, \text{ tedy } |z| = \sqrt[4]{2} \text{ a zároveň } \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{4}, \text{ tedy}$$

$$\varphi = \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{4}.$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{24} + i \sin \frac{17\pi}{24} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{29\pi}{24} + i \sin \frac{29\pi}{24} \right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{41\pi}{24} + i \sin \frac{41\pi}{24} \right)$$

Kořeny této binomické rovnice leží na kružnici o poloměru $r = \sqrt[4]{2}$ a tvoří vrcholy pravidelného čtyřúhelníka.

Příklad 3.

Je-li $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a zároveň zapíšeme-li i číslo $a = -64$ v goniometrickém tvaru $a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, máme:

$|z|^6 (\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = |-64| (\cos \pi + i \sin \pi)$, odtud z rovnosti dvou čísel v goniometrickém tvaru dostáváme

$|z|^6 = |a|$ a zároveň $6\varphi = \pi + 2k\pi$, kde $k = 0, \dots, 5$. Dostáváme, že

$$|z| = \sqrt[6]{|a|}, \text{ tedy } |z| = \sqrt[6]{|-64|} \text{ a zároveň } \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{6}, \text{ tedy}$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{6}.$$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot (0 + i) = 2i$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{5}{6} \pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{6} \pi \right) \right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \left(-\frac{5}{6} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{6} \pi \right) \right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \cdot (0 - i) = -2i$$

$$z_5 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

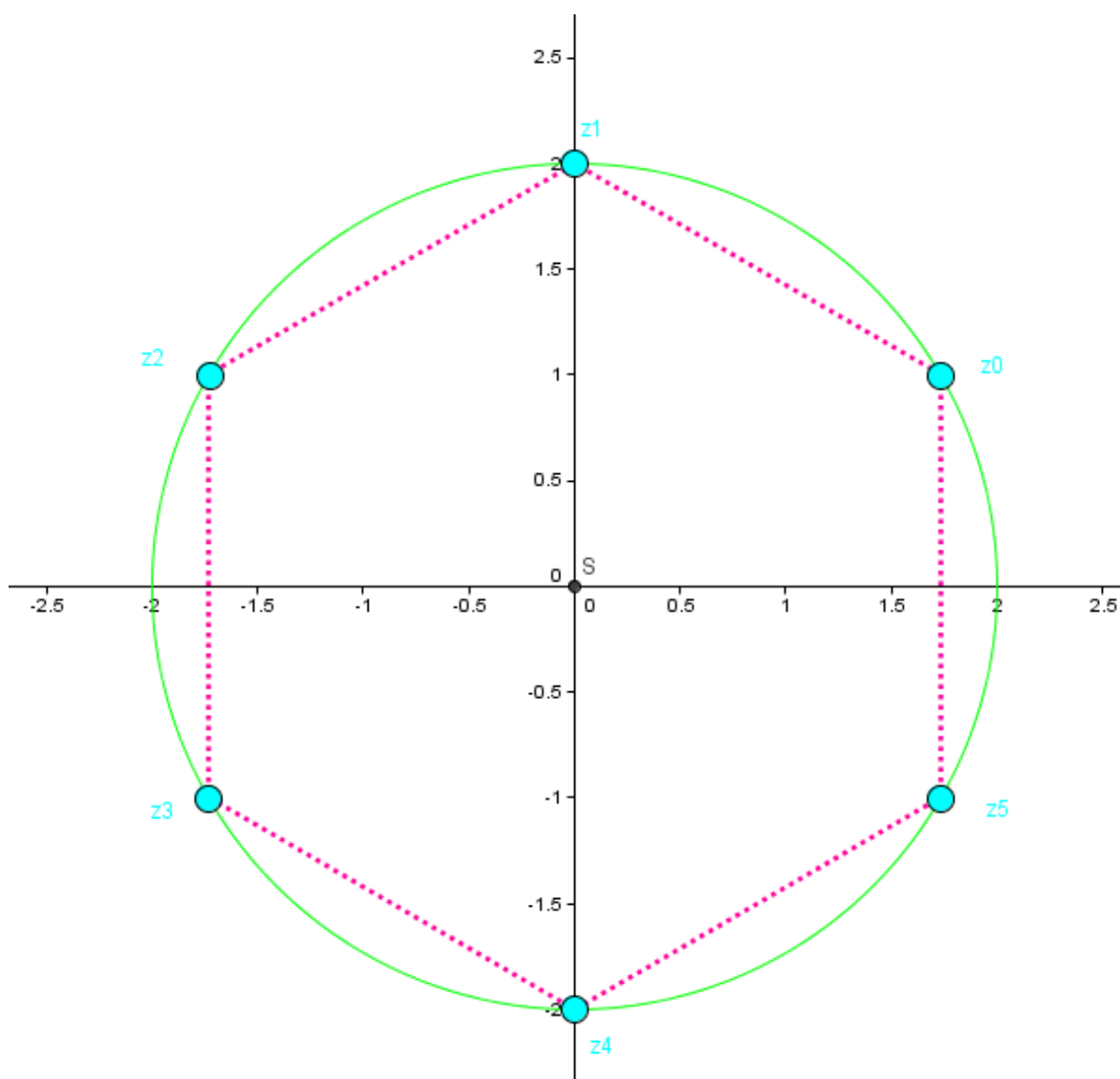


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Jestliže je kořenem $2i$, pak musí být kořenem i číslo komplexně sdružené, tedy $-2i$, obdobně $\sqrt{3}+i$ a $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}-i$ a $-\sqrt{3}+i$. Kořeny této binomické rovnice leží na kružnici o poloměru $r = 2$ a tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka.



Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: komplexní čísla*. 2. vyd. Praha: Prometheus, c1994. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4985-2.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost