



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	ROVNICE A NEROVNICE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2- 8-1-18
Anotace	Pracovní list - grafické řešení rovnic a nerovnic v obou komplexních čísel, včetně řešení. Povoleno pomůcky: rýsovací potřeby. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 7.E, 14.9.2012, Matematika

ZADÁNÍ

Příklad 1.

V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla z , pro která platí: $1 \leq |z + 2 - i| \leq 3$.

Příklad 2.

V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla z , pro která platí: $|z| > 1 \wedge |z - i| > |z| \wedge |z - 1| > 1$.

Příklad 3.

V Gaussově rovině znázorněte čísla $z \in \mathbb{C}$, která vyhovují dané soustavě: $|z + 1 - 2i| \leq 3 \wedge |z + 2 - 2i| = |z|$. Co je řešením soustavy?

Příklad 4.

Znázorněte v Gaussově rovině komplexní čísla, která vyhovují soustavě nerovnic: $2 \leq |z - 4 + i| \leq 3 \wedge \left| \frac{z - i}{z + 3i} \right| \leq 1$.

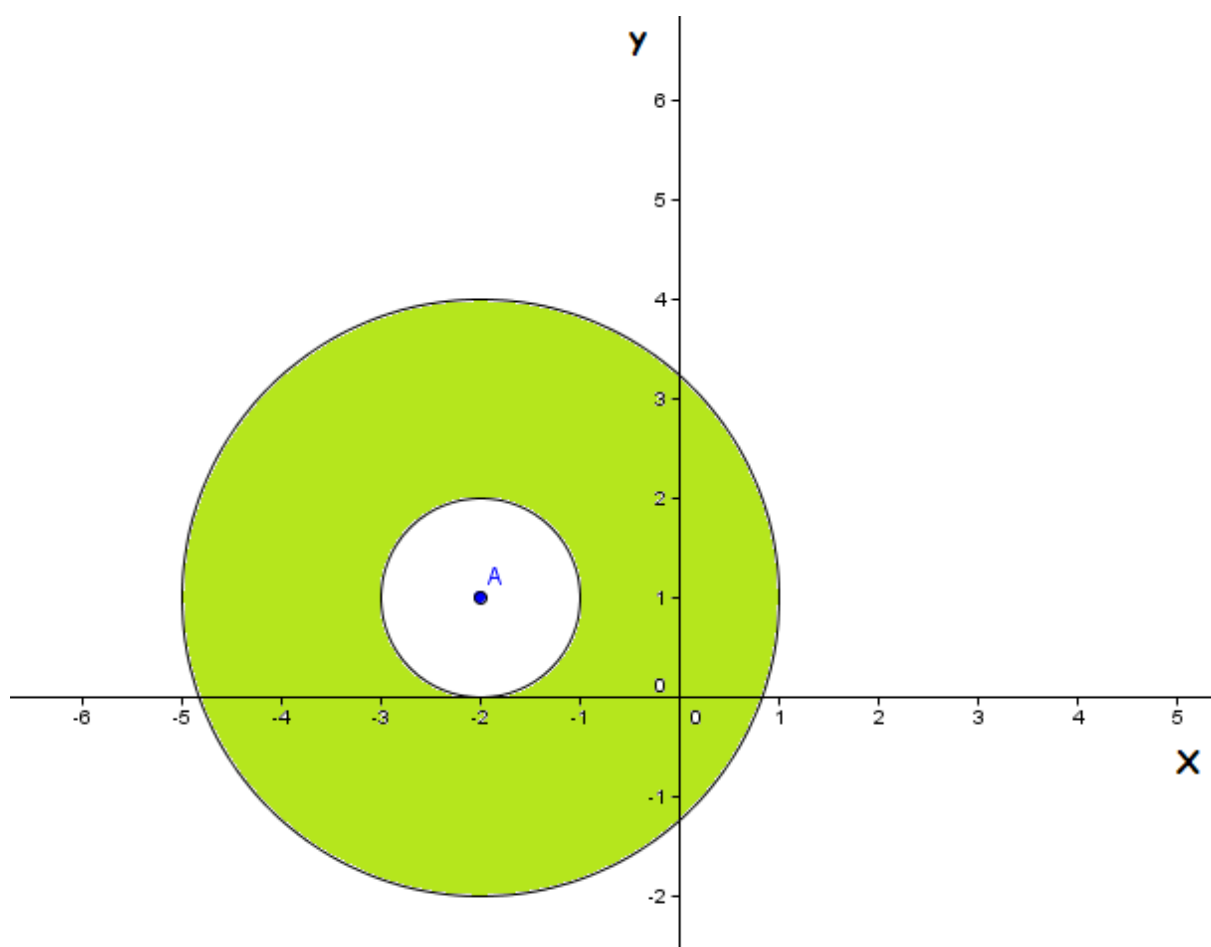
Příklad 5.

V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla z , pro která platí: $1 \leq (1 + i)\bar{z} + (1 - i)z \leq 3$.

ŘEŠENÍ

Příklad 1.

Vzdálenost obrazu komplexního čísla z od obrazu komplexního čísla $-2 + i$ má být větší nebo roven 1 a menší nebo roven 3, což odpovídá mezikružím, obě kružnice mají střed v bodě $A[-2, 1]$ a větší z nich má poloměr 3 a menší má poloměr 1. Řešením je zeleně zvýrazněné mezikružím včetně kružnic.



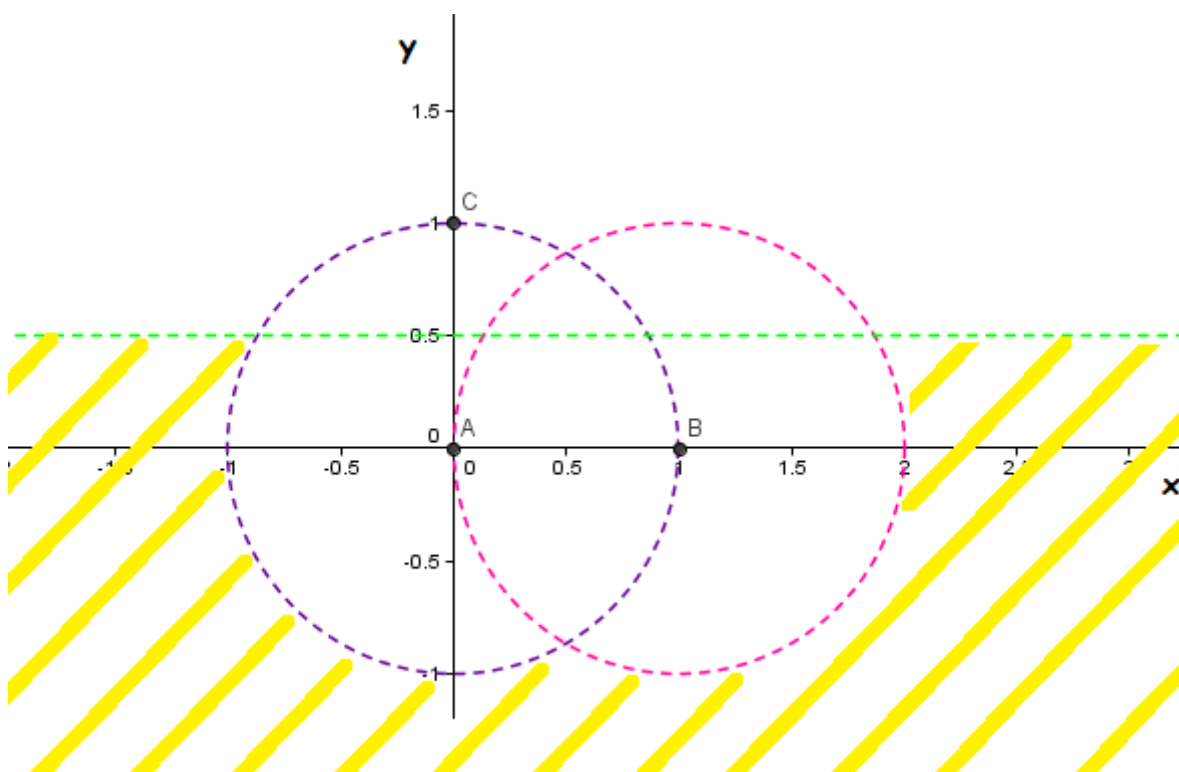
Příklad 2.

$$|z| > 1 \wedge |z - i| > |z| \wedge |z - 1| > 1$$

$$|z - (0 + 0i)| > 1 \wedge |z - (0 + i)| > |z - (0 + 0i)| \wedge |z - (1 + 0i)| > 1$$

$$A[0, 0] \quad C[0, 1] \quad A[0, 0] \quad B[1, 0]$$

První nerovnost splňují obrazy komplexních čísel, jejichž vzdálenost od bodu A je větší než 1. Množinou všech bodů roviny, které splňují druhou nerovnost, jsou obrazy komplexních čísel, které leží v polorovině určené hraniční přímkou $y = 0,5$ (osou úsečky AC) a bodem A. Třetí nerovnost splňují obrazy komplexních čísel, jejichž vzdálenost od bodu B je větší než 1. Řešením je žlutě vyšrafovaná část poloroviny.



Příklad 3.

$$|z + 1 - 2i| \leq 3 \wedge |z + 2 - 2i| = |z|$$

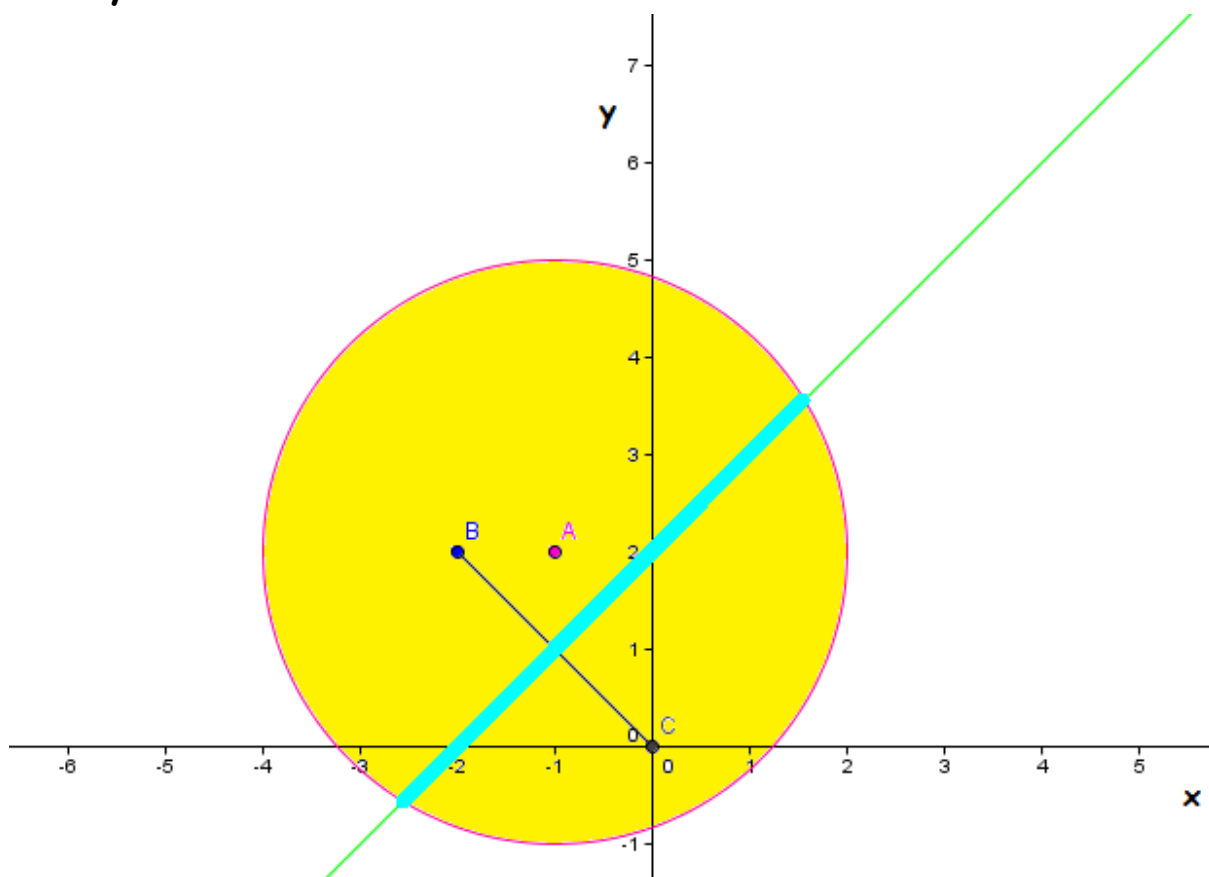
$$|z - (-1 + 2i)| \leq 3 \wedge |z - (-2 + 2i)| = |z - (0 + 0i)|$$

$$A[-1, 2]$$

$$B[-2, 2]$$

$$C[0, 0]$$

První nerovnost splňují obrazy komplexních čísel, jejichž vzdálenost od bodu A je menší nebo rovna 3. Množinou všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od daných bodů B a C, je pak osa úsečky BC, na níž leží obrazy komplexních čísel, které splňují druhou rovnost. Řešením je modře zvýrazněná tětiva kružnice, ležící na ose úsečky BC.



Příklad 4.

$$2 \leq |z - 4 + i| \leq 3 \wedge \left| \frac{z - i}{z + 3i} \right| \leq 1$$

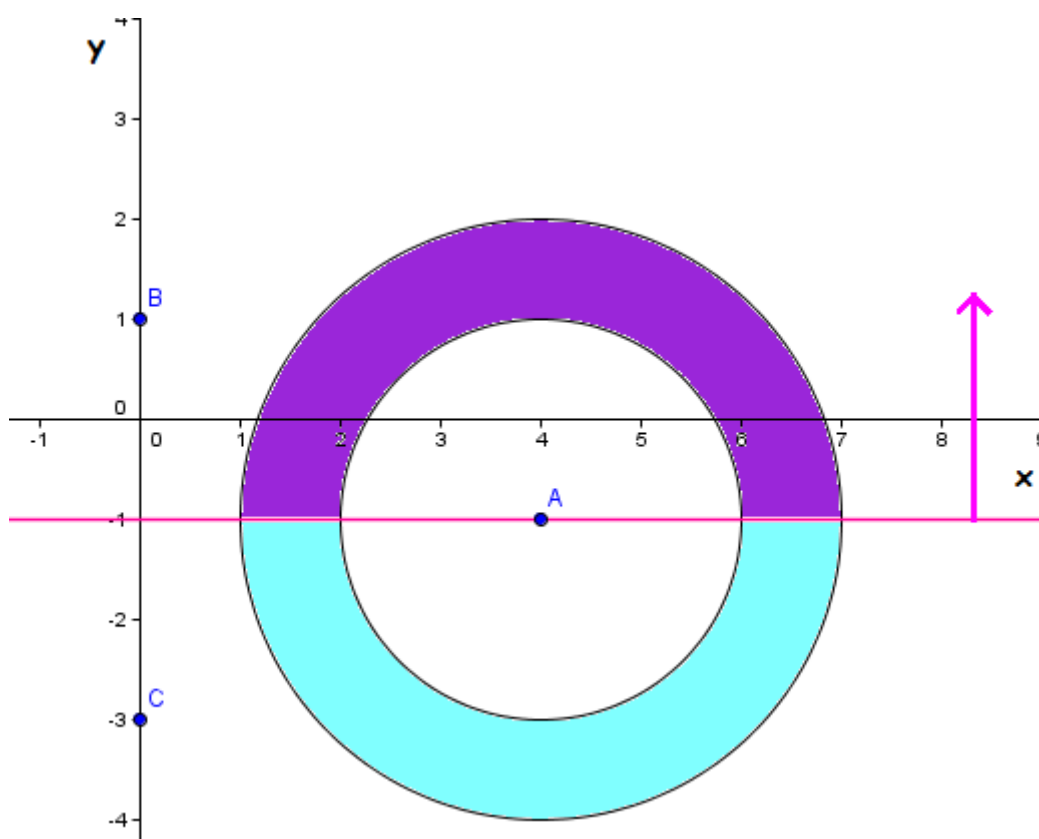
$$2 \leq |z - (4 - i)| \leq 3 \wedge |z - (0 + i)| \leq |z - (0 - 3i)|$$

$$A[4, -1]$$

$$B[0, 1]$$

$$C[0, -3]$$

První nerovnost splňují obrazy komplexních čísel, jejichž vzdálenost od bodu A je větší nebo rovna 2 a zároveň menší nebo rovna 3. Množinou všech bodů roviny, které splňují druhou nerovnost, jsou obrazy komplexních čísel, které leží v polorovině určené hraniční přímkou $y = -1$ (osou úsečky BC) a bodem B. Řešením je fialově zvýrazněná část mezikruží.



Příklad 5.

Označíme-li $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$, dosazením do nerovnice dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 \leq (1+i)\bar{z} + (1-i)z \leq 3 &\Rightarrow 1 \leq (1+i)(x-yi) + (1-i)(x+yi) \leq 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 \leq x + xi - yi + y + x - xi + yi + y \leq 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 \leq 2x + 2y \leq 3. \end{aligned}$$

Z první nerovnosti: $1 \leq 2x + 2y \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x + y \Rightarrow y \geq \frac{1}{2} - x$, potom hraniční přímka této poloroviny prochází body $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ a $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Z druhé nerovnosti: $2x + 2y \leq 3 \Rightarrow x + y \leq \frac{3}{2} \Rightarrow y \leq \frac{3}{2} - x$, tedy hraniční přímka této poloroviny prochází body $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ a $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Řešením je žlutě zvýrazněný pás včetně hraničních přímek.



evropský
sociální
fond v ČR



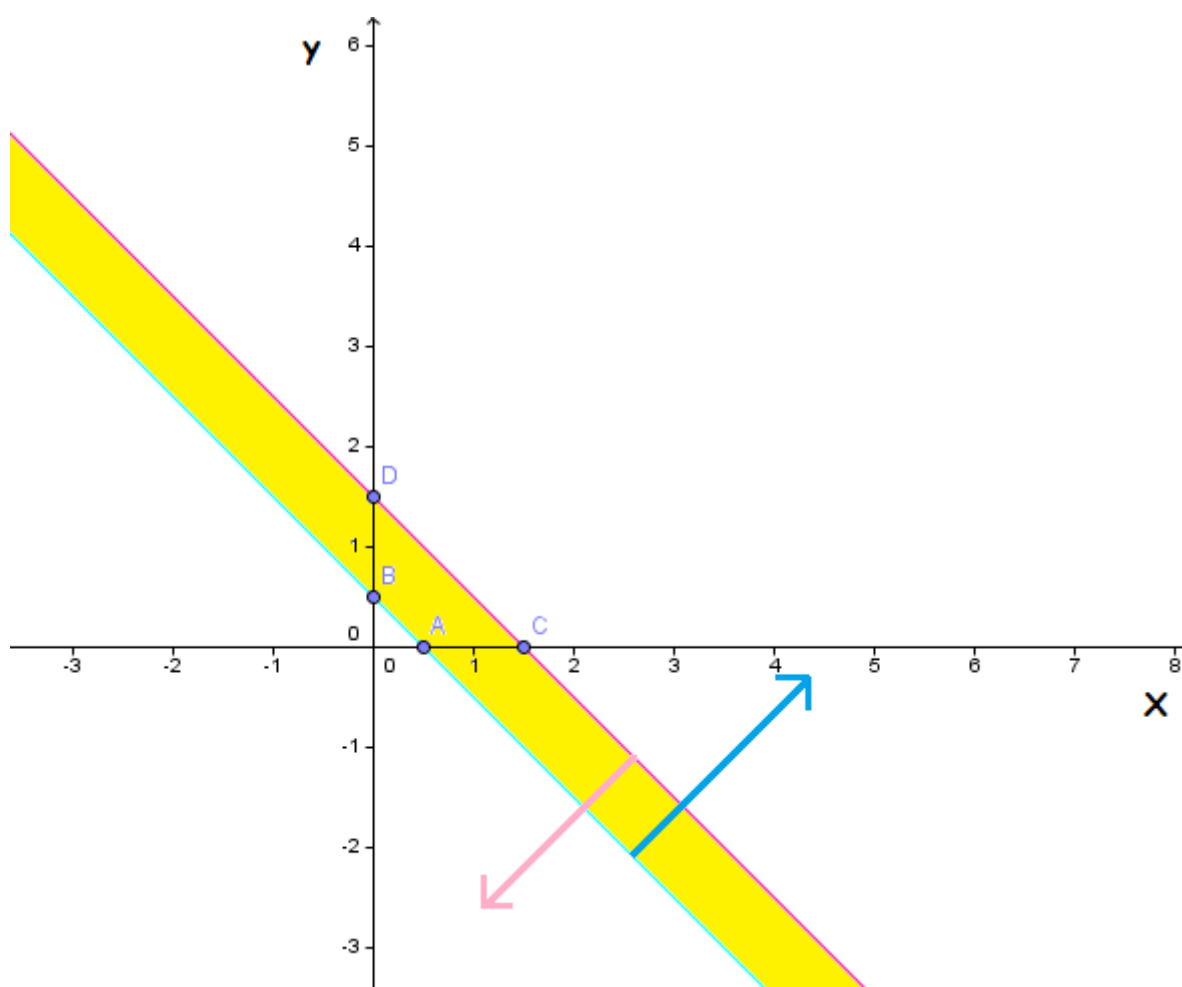
EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: komplexní čísla*. 2. vyd. Praha: Prometheus, c1994. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4985-2.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost