



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-2-10
Anotace	Tři varianty procvičovacích či testových textů z látky LINEÁRNÍ ÚTVARY V ROVINĚ, z analytické geometrie, s vypracovaným početním řešením a použitými vztahy /8 příloh/.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4.ročník, třída 4.B, 4.A a 8.E, dne 7.12.2012 , Matematický seminář

Lineární útvary v rovině

A

- 1/ a/ Napište obecnou rovnici přímky p , která má směrový úhel 135° a prochází bodem $A [4;6]$.
b/ Určete výpočtem, zda na přímce p leží bod $B [-3;2]$.
c/ Zapište obecnou rovnici i parametricky přímku b , která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem B .
- 2/ V trojúhelníku KLM , kde je dáno $K [1;0]$, $L [3;4]$, $M [0;6]$, určete:
a/ vzdálenost vrcholu M od strany m ,
b/ osu o strany KL ,
c/ průsečík přímky $\leftrightarrow KL$ s osou x ,
d/ střední příčku, která je rovnoběžná se stranou KL /parametricky – jako úsečku/.

Lineární útvary v rovině

B

- 1/ a/ Napište obecnou rovnici přímky p , která má směrnici 2 a prochází bodem $A [1;3]$.
b/ Určete výpočtem, zda na přímce p leží bod $Q [4;-2]$.
c/ Zapište obecnou rovnici i parametricky přímku b , která je kolmá k přímce p a prochází bodem Q .
- 2/ V trojúhelníku TUV , kde je dáno $T [0;6]$, $U [6;8]$, $V [2;4]$, určete:
a/ vzdálenost vrcholu V od strany TU ,
b/ těžnici t procházející vrcholem V ,
c/ průsečík přímky $\leftrightarrow UV$ s osou y ,
d/ střední příčku, která je rovnoběžná se stranou TU /parametricky – jako úsečku/.

Lineární útvary v rovině

C

- 1/ a/ Napište obecnou rovnici přímky p , která má směrový úhel 120° a prochází bodem $A [4;6]$.
b/ Určete výpočtem druhou souřadnici bodu $B [-1;?]$, který leží na přímce p .
c/ Zapište směrnicevým tvarem přímku b , která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem B .
- 2/ V trojúhelníku KLM , kde je dáno $K [1;0]$, $L [3;4]$, $M [0;6]$, určete:
a/ velikost výšky spuštěné na stranu KL ,
b/ osu o strany KL - obecnou rovnici,
c/ průsečík přímky $\leftrightarrow KL$ s osou x ,
d/ těžnici procházející vrcholem M /parametricky – jako úsečku/.

Použité vztahy:

Směrnice tvar přímky: $y = kx + q$, směrnice $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je směrový úhel přímky,
obecná rovnice přímky p: $ax + by + c = 0$, kde $(a;b)$ je normálový vektor přímky ,

vzdálenost vrcholu $M[m;n]$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ je $d = \frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

střed strany KL je $S = \frac{K + L}{2}$

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie – RNDr. Milan Kočandrle, CSc.,
Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., r.1995, ISBN 80-7196-120-5

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag Hrubý,
Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-020-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra
Petáková, 1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na VŠ
– RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

Řešení: A

- 1/ a/ Napište obecnou rovnici přímky p, která má směrový úhel 135° a prochází bodem $A[4;6]$.
 b/ Určete výpočtem, zda na přímce p leží bod $B[-3;2]$.
 c/ Zapište obecnou rovnici i parametricky přímku b, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem B.

a/ p: $y = kx + q$, směrnice $k = \tan \varphi = \tan 135^\circ = -1$

$y = -1x + q$

$A \in p: 6 = -4 + q \Rightarrow q = 10$

p: $y = -x + 10$

obecná rovnici přímky p: $x + y - 10 = 0$

b/ Ověříme, zda na přímce p leží bod $B[-3;2]$: $-3 + 2 - 10 = -11 \neq 0$, souřadnice bodu B tedy nesplňují rovnici přímky, proto B neleží na přímce p

c/ Přímka b je rovnoběžná s přímkou p, lze ji proto zapsat tvarem b: $x + y + c = 0$.

Protože bod B na b leží, souřadnice bodu B tedy splňují rovnici přímky q: $-3 + 2 + c = 0$, odtud $c = 1$, je tedy obecná rovnice přímky b: $x + y + 1 = 0$

Normálový vektor přímky b: $x + y + 1 = 0$ má souřadnice (1;1), její směrový vektor lze tedy zapsat tvarem (-1;1) a lze tedy přímku b zapsat parametricky: $x = -3 - t$,

$$\underline{y = 2 + t, t \in \mathbb{R}}$$

2/

V trojúhelníku KLM, kde je dáno $K[1;0]$, $L[3;4]$, $M[0;6]$, určete:

a/ vzdálenost vrcholu M od strany m,

b/ osu o strany KL,

c/ průsečík přímky $\leftrightarrow$ KL s osou x,

d/ střední příčku, která je rovnoběžná se stranou KL /parametricky – jako úsečku/.

a/ Směrový vektor strany KL je $\vec{KL} = L - K = (2;4)$, normálový vektor je k němu kolmý, lze jej tedy zapsat tvarem (-4;2) a přímku $\leftrightarrow$ KL obecnou rovnicí $-4x + 2y + c = 0$. Protože na této přímce leží bod K, je $c = 4$ a obecná rovnice přímky $\leftrightarrow$ KL je $-4x + 2y + 4 = 0$, tedy $2x - y - 2 = 0$.

Vzdálenost vrcholu $M[m;n]$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ je $d = \frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

vzdálenost vrcholu $M[0;6]$ od přímky $\leftrightarrow$ KL: $d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

b/ Střed strany KL je $S = \frac{K + L}{2} = [2;2]$.

Normálový vektor osy kolmé na přímku KL je směrový vektor přímky KL, tedy $\vec{KL} = (2;4)$, proto osa o úsečky KL je dána obecnou rovnicí: $2x + 4y + c = 0$. Protože S leží na této ose, je $c = -12$, má osa o strany KL obecnou rovnicí: $2x + 4y - 12 = 0$.

c/ Obecná rovnice přímky $\leftrightarrow$ KL je $2x - y - 2 = 0$, parametrické vyjádření souřadné osy x: $x = t$, $y = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Společný bod P přímky $\leftrightarrow$ KL a osy x vyhovují těmto vztahům současně. Po dosazení $y = 0$ do rovnice přímky, dostaneme $x = 1$. Je proto bod P[1;0].

d/ Střední příčku, která je rovnoběžná se stranou KL, vyjádříme parametricky jako úsečku spojující středy stran KM a LM. Souřadnice těchto středů jsou $[0,5;3]$ a $[1,5;5]$, tyto body určují směrový vektor příčky $(1;2)$, střední příčku rovnoběžnou se stranou KL lze parametricky vyjádřit: $x = 0,5 + t$, $y = 3 + 2t$, $t \in \langle 0;1 \rangle$

Řešení: B

- 1/ a/ Napište obecnou rovnici přímky p, která má směrnici 2 a prochází bodem A [1;3].
 b/ Určete výpočtem, zda na přímce p leží bod Q [4;-2].
 c/ Zapište obecnou rovnici i parametricky přímku b, která je kolmá k přímce p a prochází bodem Q.

a/ p: $y = kx + q$, směrnice $k = 2$
 $y = 2x + q$
 $A \in p: 3 = 2 \cdot 1 + q \Rightarrow q = 1$
 $p: y = 2x + 1$
obecná rovnici přímky p: $2x - y + 1 = 0$

b/ Ověříme, zda na přímce p leží bod Q [4;-2]: $8 + 2 + 1 = 11 \neq 0$, souřadnice bodu Q tedy nesplňují rovnici přímky, proto Q neleží na přímce p

c/ Přímka b je kolmá k přímce p, lze ji proto zapsat tvarem b: $x + 2y + c = 0$.
 Protože bod Q na b leží, souřadnice bodu B tedy splňují rovnici přímky q: $4 + 2 \cdot (-2) + c = 0$, odtud $c = 0$, je tedy obecná rovnice přímky b: $x + 2y = 0$
 Normálový vektor přímky b: $x + 2y = 0$ má souřadnice (1;2), její směrový vektor lze tedy zapsat tvarem (2;-1), lze tedy přímku b zapsat parametricky: $x = 4 + 2t$, $y = -2 - t$, $t \in \mathbb{R}$

- 2/ V trojúhelníku TUV, kde je dáno T [0;6], U [6;8], V [2;4], určete:
 a/ vzdálenost vrcholu V od strany TU,
 b/ těžnici t procházející vrcholem V,
 c/ průsečík přímky $\leftrightarrow$ UV s osou y,
 d/ střední příčku, která je rovnoběžná se stranou TU /parametricky – jako úsečku/.

a/ Směrový vektor strany TU je $\vec{TU} = U - T = (6;2)$, normálový vektor je k němu kolmý, lze jej tedy zapsat tvarem (-2;6) a přímku $\leftrightarrow$ TU obecnou rovnicí $-2x + 6y + c = 0$. Protože na této přímce leží bod T, je $c = -36$ a obecná rovnice přímky $\leftrightarrow$ TU je $-2x + 6y - 36 = 0$, tedy $x - 3y + 18 = 0$.

Vzdálenost vrcholu V [m;n] od přímky p: $ax + by + c = 0$ je $d = \frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

vzdálenost vrcholu V [2;4] od přímky $\leftrightarrow$ TU: $d = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 18|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

b/ Střed strany TU je $S = \frac{T+U}{2} = [3;7]$, $\vec{VS} = (1;3)$. Těžnici t procházející vrcholem V lze tedy zapsat parametricky: $x = 2 + t$, $y = 4 + 3t$, $t \in \langle 0;1 \rangle$

c/ Vektor $\vec{UV} = (-4;-4)$, normálový vektor přímky $\leftrightarrow$ UV lze proto zapsat (4;-4). Obecná rovnice přímky $\leftrightarrow$ UV je $4x - 4y + 8 = 0$, parametrické vyjádření souřadné osy y: $x = 0$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Matematika III/2-8-2 -10 – příloha 6

Společný bod P přímky $\leftrightarrow$ UV a osy y vyhovují těmto vztahům současně. Po dosazení $x = 0$ do rovnice přímky, dostaneme $y = 2$. Je proto bod P $[0;2]$.

d/ Střední příčku, která je rovnoběžná se stranou TU, vyjádříme parametricky jako úsečku spojující středy stran TV a UV. Souřadnice těchto středů jsou $[1;5]$ a $[4;6]$, tyto body určují směrový vektor příčky $(3;1)$, střední příčku rovnoběžnou se stranou TU lze parametricky vyjádřit: $x = 1 + 3t$, $y = 5 + t$, $t \in \langle 0;1 \rangle$.

Řešení: C

- 1/ a/ Napište obecnou rovnici přímky p, která má směrový úhel 120° a prochází bodem A [4;6].
 b/ Určete výpočtem druhou souřadnici bod B [-1;?], který leží na přímce p.
 c/ Zapište směrnicovým tvarem přímku b, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem Q [4;-2].

a/ p: $y = kx + q$, směrnice $k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$

$y = -\sqrt{3}x + q$

$A \in p: 6 = -4\sqrt{3} + q \Rightarrow q = 4\sqrt{3} + 6$

p: $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} + 6$

obecná rovnici přímky p: $\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{3} - 6 = 0$

b/ Protože na přímce p leží bod B [-1;?], souřadnice bodu B splňují rovnici přímky, proto $\sqrt{3} \cdot (-1) + y - 4\sqrt{3} - 6 = 0$, odtud $y = 6 + 5\sqrt{3}$, tedy bod B [-1; $6 + 5\sqrt{3}$]

c/ Přímka b je rovnoběžná s přímkou p, lze ji proto zapsat tvarem b: $\sqrt{3}x + y + c = 0$

Protože bod Q [4;-2] na b leží, souřadnice bodu Q tedy splňují rovnici přímky b: $\sqrt{3} \cdot 4 - 2 + c = 0$, odtud $c = 2 - 4\sqrt{3}$, obecná rovnice přímky b: $\sqrt{3}x + y + 2 - 4\sqrt{3} = 0$, směrnicový tvar přímky b je tedy $y = -\sqrt{3}x - 2 + 4\sqrt{3}$

- 2/ V trojúhelníku KLM, kde je dáno K [1;0], L [3;4], M [0;6], určete:

a/ velikost výšky spuštěné na stranu KL,

b/ osu o strany KL - obecnou rovnici,

c/ průsečík přímky $\leftrightarrow$ KL s osou x,

d/ těžnici procházející vrcholem M /parametricky – jako úsečku/.

a/ Velikost výšky spuštěné na stranu KL lze určit jako vzdálenost vrcholu M [0;6] od přímky $\leftrightarrow$ KL.

Směrový vektor strany KL je $\vec{KL} = L - K = (2;4)$, normálový vektor je k němu kolmý, lze jej tedy zapsat tvarem (-4;2) a přímku $\leftrightarrow$ KL obecnou rovnicí $-4x + 2y + c = 0$. Protože na této přímce leží bod K, je $c = 4$ a obecná rovnice přímky $\leftrightarrow$ KL je $-4x + 2y + 4 = 0$, tedy $2x - y - 2 = 0$.

Vzdálenost vrcholu M [0;6] od přímky $\leftrightarrow$ KL: $d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

b/ Střed strany KL je $S = \frac{K + L}{2} = [2;2]$.

Normálový vektor osy kolmé na přímku KL je směrový vektor přímky KL, tedy $\vec{KL} = (2;4)$, proto osa o strany KL je dána obecnou rovnicí: $2x + 4y + c = 0$. Protože S leží na této ose, je $c = -12$, má osa o strany KL obecnou rovnici $2x + 4y - 12 = 0$, tedy $x + 2y - 6 = 0$.

Matematika III/2-8-2 -10 – příloha 8

c/ Obecná rovnice přímky $\leftrightarrow$ KL je $2x - y - 2 = 0$, parametrické vyjádření souřadné osy x: $x = t$, $y = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Společný bod P přímky $\leftrightarrow$ KL a osy x vyhovují těmto vztahům současně. Po dosazení $y = 0$ do rovnice přímky, dostaneme $x = 1$. Je proto bod P[1;0].

d/ Střední příčku, která je rovnoběžná se stranou KL, vyjádříme parametricky jako úsečku spojující středy stran KM a LM. Souřadnice těchto středů jsou $[0,5;3]$ a $[1,5;5]$, tyto body určují směrový vektor příčky $(1;2)$, střední příčku rovnoběžnou se stranou KL lze parametricky vyjádřit: $x = 0,5 + t$, $y = 3 + 2t$, $t \in \langle 0;1 \rangle$

d/ Střed strany KL je $S = \frac{K + L}{2} = [2;2]$, $\vec{MS} = (2;-4)$. Těžnici t procházející vrcholem M lze tedy zapsat parametricky: $x = 0 + 2t$, $y = 6 - 4t$, $t \in \langle 0;1 \rangle$