

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-2-11
Anotace	Dvě varianty procvičovacích či testových textů z látky LINEÁRNÍ ÚTVARY V PROSTORU, z analytické geometrie, s vypracovaným početním řešením a použitými vztahy /6 příloh/.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4.ročník, třída 4.B, 4.A a 8.E, dne 21.12.2012 , Matematický seminář

Lineární útvary v prostoru

A

- 1/ V prostoru jsou dány body $A[-3;0;-2]$, $B[0;0;5]$, $C[2;0;6]$.
a/ Určete odchylku přímek $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow BC$.
b/ Napište parametrické vyjádření roviny ρ , v níž leží body A, B, C.
c/ Vyjádřete analyticky přímku p , která prochází bodem $R[4;5;6]$ a je kolmá k rovině ρ .
- 2/ V prostoru je dána rovina $\alpha: 4x - y + 2z - 5 = 0$.
a/ Zjistěte výpočtem, zda bod $C[2;0;6]$ leží v rovině α .
b/ Vypočtěte vzdálenost bodu C od roviny α .
c/ Vyjádřete parametricky přímku q , která je kolmá k rovině α a prochází bodem C.
- 3/ a/ Určete vzájemnou polohu rovin α a β , vypočtěte odchylku φ rovin α a β , je-li $\alpha: x = 1 + 2r - s$, $y = 2 - r + s$, $z = r - s$, kde $r \in R$, $s \in R$, a $\beta: x = 2 - 2t + 2u$, $y = 3 + 2t - 2u$, $z = -1 - 2t - 2u$, kde $t \in R$, $u \in R$.
b/ Zapište parametricky množinu společných bodů rovin α a β .

Lineární útvary v prostoru

B

- 1/ V prostoru jsou dány body $A[1;0;5]$, $B[-2;3;1]$, $C[0;0;5]$.
a/ Určete, zda přímky $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow BC$ jsou navzájem kolmé.
b/ Napište parametrické vyjádření roviny ρ , v níž leží body A, B, C.
c/ Určete průsečík roviny ρ s osou x .
- 2/ V prostoru je dána rovina $\alpha: -8x + 2y - 4z + 10 = 0$.
a/ Zjistěte výpočtem, zda bod $C[2;0;6]$ leží v rovině α .
b/ Vypočtěte vzdálenost bodu C od roviny α .
c/ Vyjádřete parametricky přímku q , která je kolmá k rovině α a prochází bodem C.
- 3/ a/ Určete vzájemnou polohu rovin α a β , je-li rovina α určena parametrickými rovnicemi: $x = t + s$, $y = t - s$, $z = t + 3s$, kde $t \in R$, $s \in R$, a rovina β obecnou rovnicí $2x - y - z - 7 = 0$, vypočtěte odchylku φ rovin α a β .
b/ Určete množinu společných bodů rovin α a β .

Použité vztahy:

Vzdálenost bodu $C[c_1, c_2, c_3]$ od roviny α dané obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ se vypočítá

$$|C\alpha| = \frac{|c_1 \cdot a + c_2 \cdot b + c_3 \cdot c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Normálový vektor roviny $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ je vektor $\vec{n} = (a; b; c)$, $\vec{n}$ je současně směrovým vektorem přímky p , která je kolmá k rovině α .

Rovina ρ je určena parametricky: $X = B + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, kde $t \in R$, $s \in R$, přičemž vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou rovnoběžné s rovinou ρ a bod R je bod roviny ρ .

Přímka p je určena parametricky vztahem: $X = C + t \cdot \vec{u}$, $t \in R$, tedy $\underline{x = c_1 + t \cdot u_1, y = c_2 + t \cdot u_2, z = c_3 + t \cdot u_3,}$
kde $t \in R, C[c_1, c_2, c_3], \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

Odchylka φ rovin s normálovými vektory $\vec{n}$ a $\vec{m}$ je určena vztahem: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie – RNDr. Milan Kočandrle, CSc.,
Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., r.1995, ISBN 80-7196-120-5

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag Hrubý,
Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-020-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra Petáková,
1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na VŠ –
RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

Řešení: A

1/ V prostoru jsou dány body $A[-3;0;-2]$, $B[0;0;5]$, $C[2;0;6]$.

a/ Určete odchylku φ přímek $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow BC$.

b/ Napište parametrické vyjádření roviny ρ , v níž leží body A, B, C.

c/ Vyjádřete analyticky přímku p, která prochází bodem $R[4;5;6]$ a je kolmá k rovině ρ .

a/ Směrové vektory $\vec{AB} = \vec{u} = (3;0;7)$, $\vec{BC} = \vec{v} = (2;0;1)$

$$\cos \varphi = \frac{(3;0;7) \cdot (2;0;1)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 7^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \text{odchylka přímek je } \underline{\varphi = 40^\circ 14'}$$

b/ $\vec{AC} = \vec{v} = (5;0;8)$, proto rovina ρ je určena parametricky: $X = B + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, kde $t \in R$, $s \in R$.

Tedy rovina ρ je určena třemi rovnicemi: $x = 3t + 5s$, $y = 0$, $z = 5 + 7t + 8s$, kde $t \in R$, $s \in R$.

c/ Normálový vektor roviny je vektorovým součinem vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, což je vektor $\vec{n} = (0;11;0)$, který je současně směrovým vektorem hledané přímky p, která prochází bodem R.

Proto přímka p je určena parametricky vztahem: $X = R + t \cdot \vec{n}$, $t \in R$,
tedy $x = 4$, $y = 5 + 11t$, $z = 6$, kde $t \in R$.

2/ V prostoru je dána rovina $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$.

a/ Zjistěte výpočtem, zda bod $C[2;0;6]$ leží v rovině α .

b/ Vypočítejte vzdálenost bodu C od roviny α .

c/ Vyjádřete parametricky přímku q, která je kolmá k rovině α a prochází bodem C.

a/ Pokud bod C leží v rovině α , musí jeho souřadnice vyhovovat po dosazení do rovnice roviny α .

$4 \cdot 2 - 0 + 2 \cdot 6 - 5 = 15 \neq 0$, tedy bod C v rovině α neleží.

b/ Vzdálenost C od roviny α se vypočítá $|C\alpha| = \frac{|c_1 \cdot a + c_2 \cdot b + c_3 \cdot c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, tedy

$$|C\alpha| = \frac{|2 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{15}{\sqrt{21}} = \frac{15 \cdot \sqrt{21}}{21} = \frac{5 \cdot \sqrt{21}}{7}$$

c/ Normálový vektor roviny je vektor $\vec{n} = (4;-1;2)$ je současně směrovým vektorem hledané přímky p, která prochází bodem C.

Proto přímka p je určena parametricky vztahem: $X = R + t \cdot \vec{n}$, $t \in R$,
tedy $x = 2 + 4t$, $y = 0 - t$, $z = 6 + 2t$, kde $t \in R$.

- 3/ a/ Určete vzájemnou polohu rovin α a β , vypočítejte odchylku φ rovin α a β , je-li $\alpha: x = 1 + 2r - s$, $y = 2 - r + s$, $z = r - s$, kde $r \in R$, $s \in R$, a $\beta: x = 2 - 2t + 2u$, $y = 3 + 2t - 2u$, $z = -1 - 2t - 2u$, kde $t \in R$, $u \in R$.
b/ Zapište parametricky množinu společných bodů rovin α a β .

- a/ Rovina α je určena vektory $(2; -1; 1)$ a $(-1; 1; -1)$, jejichž vektorovým součinem je vektor $\vec{n} = (0; 1; 1)$, Rovina β je určena vektory $(-2; 2; -2)$ a $(2; -2; -2)$, jejichž vektorovým součinem je vektor $\vec{m} = (-8; -8; 0)$. Protože vektory $\vec{n}$ a $\vec{m}$ nejsou reálnými násobky, jsou různoběžné, a jimi určené dané roviny α a β jsou tedy také různoběžné.

Odchylka φ rovin s normálovými vektory $\vec{n}$ a $\vec{m}$ je určena vztahem: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|}$, je tedy

$$\cos \varphi = \frac{|0 - 8 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{128}}, \text{ je tedy odchylka daných rovin } \varphi = 60^\circ.$$

- b/ Směrový vektor $\vec{s}$ průsečnice s daných rovin je vektorovým součinem jejich normálových vektorů $\vec{n}$ a $\vec{m}$, je tedy $\vec{s} = (8; -8; 8)$. Společný bod rovin α a β získáme řešením soustavy 6 rovnic pro 7 neznámých x, y, z, t, u, r, s . Porovnáním 1., 2., a 3. souřadnic získáme 3 rovnice pro 4 neznámé: $1 + 2r - s = 2 - 2t + 2u$, $2 - r + s = 3 + 2t - 2u$, $r - s = -1 - 2t - 2u$. Pro určení jednoho bodu průsečnice položíme např. $s = 1$. Po dosazení do těchto rovnic dostaneme soustavu 3 rovnic pro 3 neznámé:
 $1 + 2r - 1 = 2 - 2t + 2u$
 $2 - r + 1 = 3 + 2t - 2u$
 $r - 1 = -1 - 2t - 2u$

Sčítací metodou vypočteme $u = 0$, $r = 2$, $t = -1$, jejichž dosazením do parametrického vyjádření roviny α získáme bod průsečnice $A = [4; 1; 1]$.

Parametrické vyjádření průsečnice rovin α a β je s: $X = A + t \cdot \vec{s}$, $t \in R$, $A = [4; 1; 1]$, $\vec{s} = (8; -8; 8)$.

Řešení: B

- 1/ V prostoru jsou dány body $A[1;0;5]$, $B[-2;3;1]$, $C[0;0;5]$.
- a/ Určete, zda přímky $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow BC$ jsou navzájem kolmé.
- b/ Napište parametrické vyjádření roviny ρ , v níž leží body A, B, C.
- c/ Určete průsečík roviny ρ s osou x.
- a/ V rovině leží vektory $\vec{AB} = \vec{u} = (-3;3;-4)$, $\vec{BC} = \vec{w} = (2;-3;4)$, $\vec{AC} = \vec{v} = (-1;0;0)$
- Skalární součin vektorů $\vec{AB}$ a $\vec{BC}$ je $-6 - 9 - 16 = -31 \neq 0$, odchylka přímek tedy není 90° , proto přímky $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow BC$ nejsou navzájem kolmé.
- b/ $\vec{AC} = \vec{v} = (5;0;8)$, proto rovina ρ je určena parametricky: $X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, kde $t \in R$, $s \in R$.
Tedy rovina ρ je určena třemi rovnicemi: $x = 1 - 3t + 2s$, $y = 0 + 3t - 3s$, $z = 5 - 4t + 4s$, kde $t \in R$, $s \in R$.
- c/ Osa x je určena soustavou rovnic $y = 0$, $z = 0$. Dosazením do parametrického vyjádření roviny za y a z získáme 2 rovnice pro neznámé t a s: $0 = 3t - 3s$, $0 = 5 - 4t + 4s$. Tato soustava nemá řešení, proto rovina ρ nemá s osou x žádný společný bod.
- 2/ V prostoru je dána rovina $\alpha : -8x + 2y - 4z + 10 = 0$.
- a/ Zjistěte výpočtem, zda bod $C[2;0;6]$ leží v rovině α .
- b/ Vypočtěte vzdálenost bodu C od roviny α .
- c/ Vyjádřete parametricky přímku q, která je kolmá k rovině α a prochází bodem C.
- a/ Danou obecnou rovnici roviny α lze vydělit -2, čímž získáme rovnici $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$. Pokud bod C leží v rovině α , musí jeho souřadnice vyhovovat po dosazení do rovnice roviny α .
 $4 \cdot 2 - 0 + 2 \cdot 6 - 5 = 15 \neq 0$, tedy bod C v rovině α neleží.
- b/ Vzdálenost C od roviny α se vypočítá $|C\alpha| = \frac{|c_1 \cdot a + c_2 \cdot b + c_3 \cdot c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, tedy
- $$|C\alpha| = \frac{|2 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{15}{\sqrt{21}} = \frac{15 \cdot \sqrt{21}}{21} = \frac{5 \cdot \sqrt{21}}{7}$$
-
- c/ Normálový vektor roviny je vektor $\vec{n} = (4; -1; 2)$ a je současně směrovým vektorem hledané přímky p, která prochází bodem C.
- Proto přímka p je určena parametricky vztahem: $X = C + t \cdot \vec{n}$, $t \in R$,
tedy $x = 2 + 4t$, $y = 0 - t$, $z = 6 + 2t$, kde $t \in R$.

Matematika III/2-8-2 -11 – příloha 6

- 3/ a/ Určete vzájemnou polohu rovin α a β , je-li rovina α určena parametrickými rovnicemi: $x = t + s$, $y = t - s$, $z = t + 3s$, kde $t \in R$, $s \in R$, a rovina β obecnou rovnicí $2x - y - z - 7 = 0$, vypočtete odchylku φ rovin α a β .
- b/ Určete množinu společných bodů rovin α a β .
- a/ Rovina α je určena vektory $(1;1;1)$ a $(1;-1;3)$, jejichž vektorovým součinem je vektor $\vec{n} = (4;-2;-2)$, Rovina β je určena normálovým vektorem $(2;-1;-1)$, což je násobek vektoru $\vec{n}$. Normálové vektory obou rovin jsou rovnoběžné, proto i tyto roviny α a β , jsou rovnoběžné. Protože jsou roviny rovnoběžné, je jejich odchylka 0° .
- b/ Protože jsou dané roviny rovnoběžné, stačí zjistit, zda nějaký bod roviny α leží v rovině β . Z parametrického vyjádření roviny α plyne, že v ní leží bod $A[0;0;0]$, Po dosazení jeho souřadnic do obecné rovnice roviny β : $2x - y - z = 0$ získáme vztah $-7 = 0$, tedy bod A v rovině β neleží. Proto musí být roviny α a β rovnoběžné různé a nemají tedy žádný společný bod.