



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-2-12
Anotace	Dvě varianty procvičovacích či testových textů z látky KRUŽNICE A PŘÍMKA ANALYTICKY s vypracovaným početním řešením a použitými vztahy /6 příloh/.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4.ročník, třída 4.B, 4.A a 8.E, dne 4.1.2013 , Matematický seminář

Kružnice a přímka analyticky

A

- 1/ Popište množinu všech bodů X v rovině, jejichž souřadnice x a y splňují vztah:
 $x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 7$
- 2/ Určete polohu bodu $M[3;7]$ vzhledem ke kružnici $k(S; r)$, body dotyku a obecné rovnice všech tečen kružnice $k(S; r)$, které procházejí bodem M , je-li $S[-2;2]$ a $r = \sqrt{5}$.

Kružnice a přímka analyticky

B

- 1/ Popište množinu všech bodů X v rovině, jejichž souřadnice x a y splňují vztah:
 $x^2 + y^2 + 4x - 2y \geq 0$
- 2/ Určete polohu bodu $R[0;-1]$ vzhledem ke kružnici $k(S; r)$. Napište obecné rovnice všech tečen kružnice $k(S; r)$, které procházejí bodem R , je-li $S[2;0]$ a $r = 1$. Určete i souřadnice bodů dotyku tečen a kružnice.

Použité vztahy:

Středová rovnice kružnice $k(S; r)$: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, se středem $S[m; n]$ a poloměrem r

Rovnice tečny t kružnice $k(S; r)$ v bodě dotyku $T[x_0; y_0]$: $(x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie – RNDr. Milan Kočandrle, CSc.,
Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., r.1995, ISBN 80-7196-120-5

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag
Hrubý, Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-020-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra
Petáková, 1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na
VŠ – RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

Řešení: A

- 1/ Popište množinu všech bodů X v rovině, jejichž souřadnice x a y splňují vztah:

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 7.$$

$x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 7$ upravíme doplněním na čtverec:

$$(x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \leq 7$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 10,25 \dots \text{kruh se středem } S\left[-1; \frac{3}{2}\right] \text{ a poloměrem } r = \sqrt{10,25}$$

- 2/ Napište obecné rovnice všech tečen kružnice $k(S; r)$, které procházejí bodem $R[3;7]$, je-li $S[-2;2]$ a $r = \sqrt{5}$. Určete i souřadnice bodů dotyku tečen a kružnice.

Středová rovnice kružnice $k(S; r)$: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$
 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$

Určíme polohu bodu R vzhledem ke kružnici k dosazením jeho souřadnic do rovnice kružnice:

$$L = (3+2)^2 + (7-2)^2 = 50, \quad P = 5,$$

L je větší než P , proto bod R leží vně kružnice. Budou tedy existovat 2 tečny kružnice procházející bodem R .

Rovnice tečny t kružnice $k(S; r)$: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ v bodě $T[x_0; y_0]$:

$$(x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$$

Na tečně leží bod R : $(x_0 + 2) \cdot (3 + 2) + (y_0 - 2) \cdot (7 - 2) = 5$

$$5x_0 + 10 + 5y_0 - 10 = 5$$

$$5x_0 + 5y_0 = 5$$

$$x_0 + y_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 - y_0 \dots \text{tyto souřadnice } x_0$$

a y_0 bodu T dosadíme do rovnice kružnice k : $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$

$$(1 - y_0 + 2)^2 + (y_0 - 2)^2 = 5$$

$$(3 - y_0)^2 + (y_0 - 2)^2 = 5$$

$$y_0^2 - 5y_0 + 4 = 0$$

Řešením této rovnice jsou dvě ... $y_0 = 4$ a $y_0 = 1$, k nim $x_0 = 1 - 4 = -3$, $x_0 = 1 - 1 = 0$, tedy dva body dotyku $\underline{T[-3;4]}$ a $\underline{T'[0;1]}$ tečny t s kružnicí k . Po dosazení těchto souřadnic za x_0 a y_0 do rovnice tečny t : $(x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$, tj.

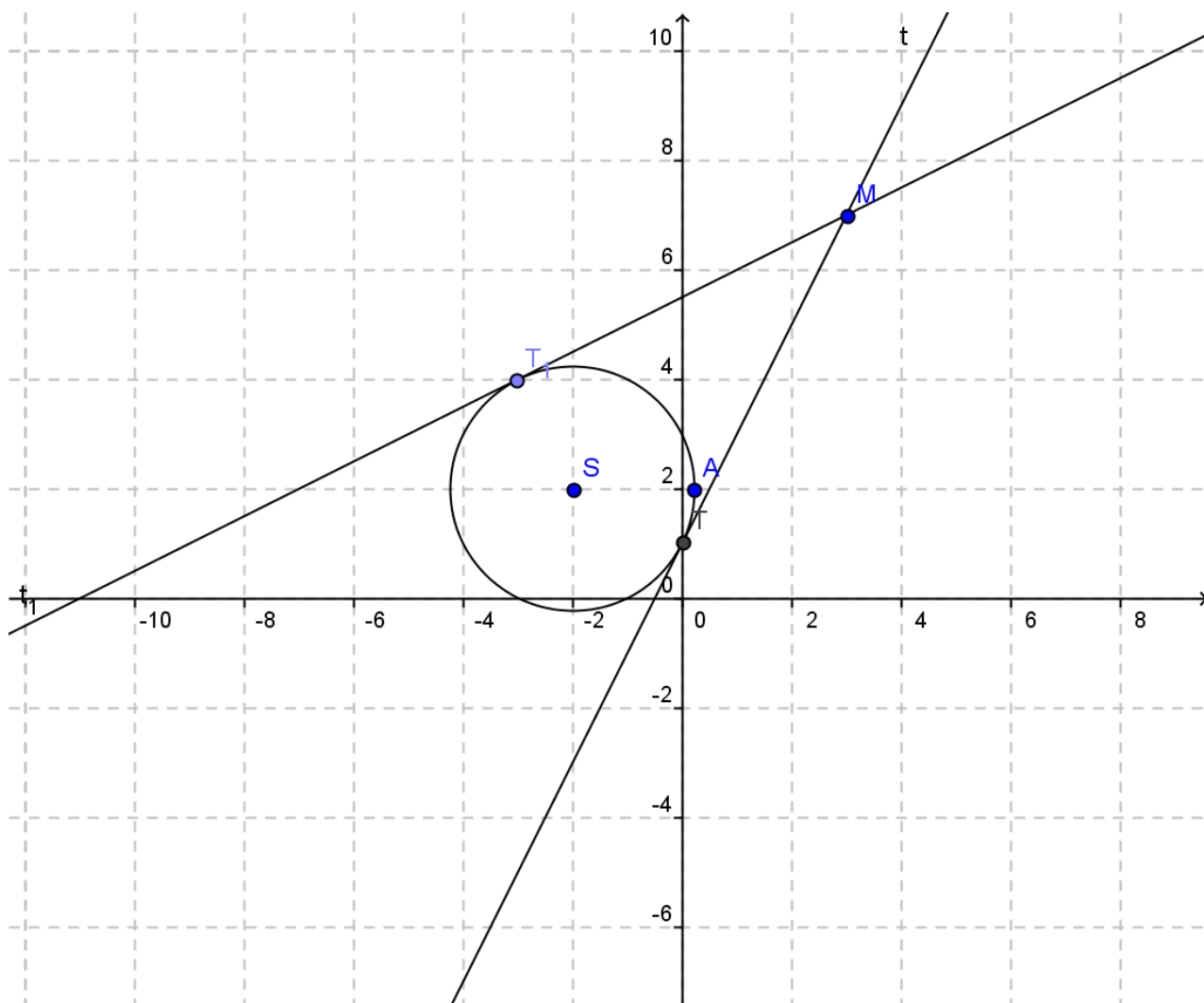
do $(x_0 + 2) \cdot (x + 2) + (y_0 - 2) \cdot (y - 2) = 5$, získáme rovnice dvou tečen

$$t: (-3 + 2) \cdot (x + 2) + (4 - 2) \cdot (y - 2) = 5$$

$$\underline{x - 2y + 11 = 0}$$

$$a \quad t': (0 + 2) \cdot (x + 2) + (1 - 2) \cdot (y - 2) = 5$$

$$\underline{2x - y + 1 = 0}$$



Řešení: B

- 1/ Popište množinu všech bodů X v rovině, jejichž souřadnice x a y splňují vztah:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y \geq 0.$$

$x^2 + y^2 + 4x - 2y \geq 0$ upravíme doplněním na čtverec:

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 \geq 0$$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 5$...kružnice se středem $S[-2;1]$ a poloměrem $r = \sqrt{5}$ a její vnějšek.

- 2/ Napište obecné rovnice všech tečen kružnice $k(S; r)$, které procházejí bodem $R[0;-1]$, je-li $S[2;0]$ a $r = 1$. Určete i souřadnice bodů dotyku tečen a kružnice.

Středová rovnice kružnice $k(S; r)$: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

Určíme polohu bodu R vzhledem ke kružnici k dosazením jeho souřadnic do rovnice kružnice:

$$L = (0-2)^2 + (-1)^2 = 5, \quad P = 1.$$

L je větší než P , proto bod R leží vně kružnice. Budou tedy existovat 2 tečny kružnice procházející bodem R .

Rovnice tečny t kružnice k v bodě $T[x_0; y_0]$: $(x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$

Na tečně leží bod R : $(x_0 - 2) \cdot (0 - 2) + (y_0 - 0) \cdot (-1 - 0) = 1$

$$-2x_0 + 4 - y_0 - 1 = 0$$

$$y_0 = -2x_0 + 3 \dots \text{ tyto souřadnice } x_0 \text{ a } y_0 \text{ bodu } T$$

dosadíme do rovnice kružnice k : $(x-2)^2 + y^2 = 1$

$$(x_0 - 2)^2 + (-2x_0 + 3)^2 = 1$$

$$5x_0^2 - 16x_0 + 12 = 0$$

Řešení této rovnice jsou dvě ... $x_0 = 2$ a $x_0 = \frac{6}{5}$, k nim $y_0 = -2 \cdot 2 + 3 = -1$, $y_0 = -2 \cdot \frac{6}{5} + 3 = \frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}$, tedy dva body dotyku $\underline{T[2;-1]}$ a $\underline{T'[\frac{6}{5}; \frac{3}{5}]}$ tečny t s kružnicí k . Po dosazení těchto

souřadnic za x_0 a y_0 do rovnice tečny t : $(x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$,

tj. do $(x_0 - 2) \cdot (x - 2) + (y_0) \cdot (y) = 1$, získáme rovnice dvou tečen

$$t: (2 - 2) \cdot (x - 2) + (-1) \cdot y = 1,$$

$$\underline{y = -1}$$

$$a \quad t': (\frac{6}{5} - 2) \cdot (x - 2) + \frac{3}{5} \cdot y = 1,$$

$$\underline{-4x + 3y + 3 = 0}$$

Matematika III/2-8-2-12– příloha 6

