



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-2-13
Anotace	Dvě varianty procvičovacích či testových textů z látky ELIPSA A JEJÍ TEČNY s vypracovaným početním řešením a použitými vztahy /6 příloh/.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4.ročník, třída 4.B, 4.A a 8.E, dne 4.1.2013 , Matematický seminář

Elipsa a její tečny

A

- 1/ Elipsa je dána rovnicí $16x^2 + 25y^2 - 32x - 84 = 0$. Vypočtete souřadnice jejích ohnisek E a F, středu S, hlavních a vedlejších vrcholů. Křivku zakreslete.
- 2/ Napište osovou rovnici elipsy, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou x, střed S $[2; -1]$, vedlejší poloosa $b = 2$ a excentricita $e = \sqrt{5}$.
- 3/ Napište rovnice všech tečen elipsy $x^2 + 3y^2 - 81 = 0$ v jejím bodě T $[0; -3\sqrt{3}]$.

Elipsa a její tečny

B

- 1/ Elipsa je dána rovnicí $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$. Vypočtete souřadnice jejích ohnisek E a F, středu S, hlavních a vedlejších vrcholů. Křivku zakreslete.
- 2/ Napište osovou rovnici elipsy, která má vedlejší vrcholy C $[3; 5]$ a D $[3; -1]$ a excentricitu $e = 4$.
- 3/ Napište rovnice všech tečen elipsy $x^2 + 3y^2 - 81 = 0$, které jsou kolmé k přímce p: $x - 3y + 6 = 0$.

Použité vztahy:

Elipsa s osou rovnoběžnou s osou x a středem $S[m;n]$ má rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Excentricita elipsy $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

Tečna rovnoběžná s přímkou může mít normálový vektor jako tato přímka, tečna kolmá k přímce má normálový vektor kolmý k normálovému vektoru přímky.

Směrnice tvar přímky je $y = kx + q$, kde k je směrnice přímky.

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie – RNDr. Milan Kočandrle, CSc.,
Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., r.1995, ISBN 80-7196-120-5

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag
Hrubý, Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-020-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra
Petáková, 1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám
na VŠ – RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

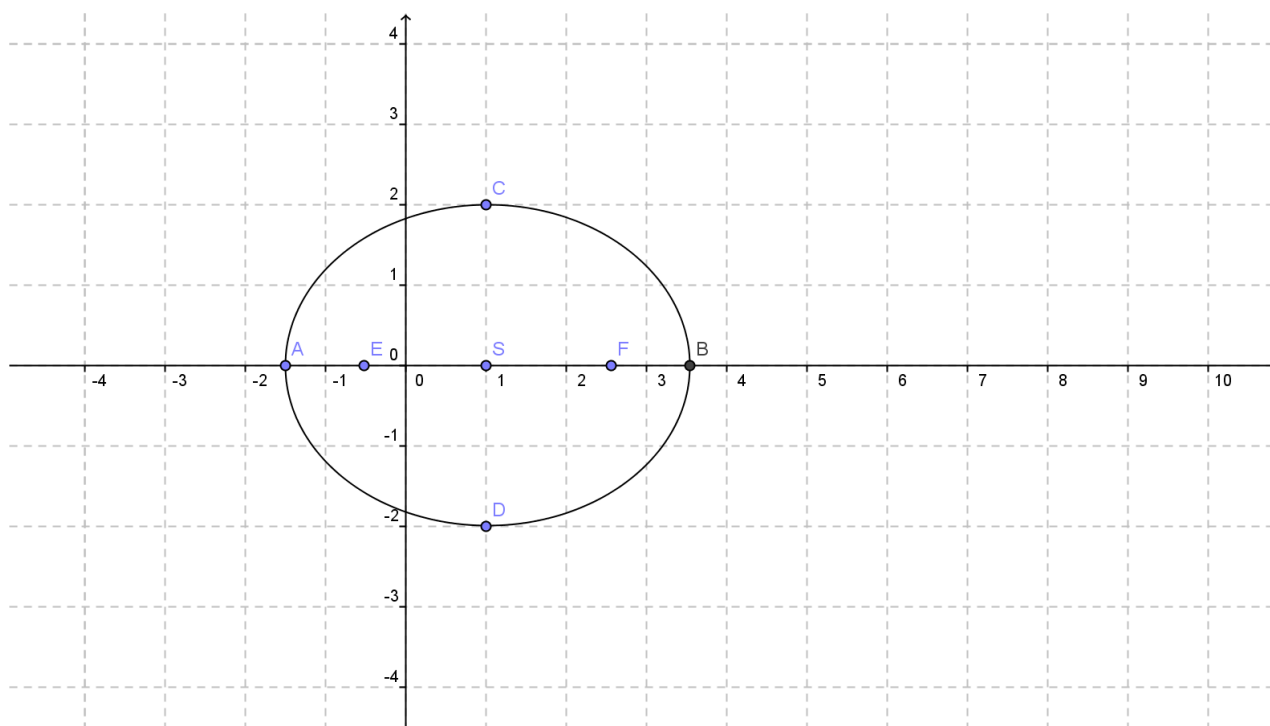
Řešení: A

- 1/ Elipsa je dána rovnicí $16x^2 + 25y^2 - 32x - 84 = 0$. Vypočtete souřadnice jejích ohnisek E a F, středu S, hlavních a vedlejších vrcholů. Křivku zakreslete.

Upravíme danou rovnici doplněním na čtverec: $16x^2 + 25y^2 - 32x - 84 = 0$,

$$16(x - 1)^2 + 25y^2 = 84 + 16 = 100, \text{ po vydělení rovnice } 100 \text{ dostaneme } \frac{(x-1)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Elipsa má tedy střed $S[1;0]$, hlavní poloosu $a = 2,5$, vedlejší poloosu $b = 2$, excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{3}{2}$. Ohniska $E[-0,5;0]$, $F[2,5;0]$, hlavní vrcholy $A[-1,5;0]$, $B[3,5;0]$, vedlejší vrcholy $C[1;2]$, $D[1;-2]$.



- 2/ Napište osovou rovnici elipsy, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou x, střed $S[2;-1]$, vedlejší poloosa $b = 2$ a excentricita $e = \sqrt{5}$.

Vypočteme hlavní poloosu $a = \sqrt{e^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

Osová rovnice elipsy je tedy $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

Matematika III/2-8-2-13 – příloha 4

- 3/ Napište rovnice všech tečen elipsy $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$, jejichž směrnice je $k = -0,8$.

Tečnu t se směrnicí $k = -0,8$ lze napsat ve tvaru $t: y = -0,8x + q$.

Společné body tečny t a elipsy určíme řešením soustavy rovnic elipsy a tečny. Výraz $y = -0,8x + q$ dosadíme do rovnice elipsy a dostaneme rovnici $9x^2 + 25(-0,8x + q)^2 - 225 = 0$, tedy $25x^2 + 40qx + 25q^2 - 225 = 0$. Protože tečna má s křivkou právě jeden společný bod, je diskriminant této rovnice $D = 1600q^2 - 4 \cdot 25 \cdot (25q^2 - 225) = 0$, odtud $q = -5$ nebo $q = 5$. Existují tedy 2 tečny požadované vlastnosti, $t: y = -0,8x - 5$ a $t': y = -0,8x + 5$.

Řešení: B

- 1/ Elipsa je dána rovnicí $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$. Vypočtěte souřadnice jejích ohnisek E a F, středu S, hlavních a vedlejších vrcholů. Křivku zakreslete.

Upravíme danou rovnici doplněním na čtverec: $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$,
 $16(x - 2)^2 + 25(y + 3)^2 = 111 + 64 + 225 = 400$,

po vydělení rovnice 400 dostaneme rovnici $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$.

Elipsa má tedy střed $S[2;-3]$, hlavní poloosu $a = 5$, vedlejší poloosu $b = 4$, excentricita

$e = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$. Ohniska $E[-1;-3]$, $F[5;-3]$, hlavní vrcholy $A[-3;-3]$, $B[7;-3]$, vedlejší vrcholy $C[2;1]$, $D[2;-7]$.

- 2/ Napište osovou rovnici elipsy, která má vedlejší vrcholy $C[3;5]$ a $D[3;-1]$ a excentricitu $e = 4$.

Velikost vedlejší poloosy b je rovna polovině vzdálenosti vrcholů C a D , tj. $b = 3$.

Vypočteme hlavní poloosu a : $a = \sqrt{e^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Z polohy vedlejších vrcholů C a D plyne, že hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x a tedy osová rovnice elipsy je

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

- 3/ Napište rovnice všech tečen elipsy $x^2 + 3y^2 - 81 = 0$, které jsou kolmé k přímce $p: x - 3y + 6 = 0$.

Tečnu t kolmou k přímce p lze napsat ve tvaru $t: 3x + y + c = 0$. Z této rovnice vyjádříme $y = -3x - c$.

Společné body tečny t a elipsy určíme řešením soustavy rovnice elipsy a tečny. Výraz $y = -3x - c$ dosadíme do rovnice elipsy a dostaneme rovnici $x^2 + 3(-3x - c)^2 - 81 = 0$, tedy

$28x^2 + 18cx + 3c^2 - 81 = 0$. Protože tečna má s křivkou právě jeden společný bod, je

diskriminant této rovnice $D = 324c^2 - 4 \cdot 28 \cdot (3c^2 - 81) = 0$, odtud $c = -27,5$ nebo $c' = 27,5$. Existují tedy 2 tečny požadované vlastnosti, $t: 3x + y - 27,5 = 0$ a $t': 3x + y + 27,5 = 0$.

