



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-2-14
Anotace	Dvě varianty procvičovacích či testových textů z látky HYPERBOLA A PŘÍMKA s vpracovaným početním řešením a použitými vztahy /6 příloh/.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4.ročník, třída 4.B, 4.A a 8.E, dne 8.1.2013 , Matematický seminář

Hyperbola a přímka

A

- 1/ Napište středovou rovnici hyperboly s ohnisky $E[-3;2]$, $F[3;2]$, hlavní osou $2a = 4$.
Napište rovnice asymptot dané hyperboly...
- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice splňují vztah:
 $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$. Určete všechny důležité body této množiny /ohniska, středy, vrcholy, asymptoty/.
- 3/ Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice splňují vztah:
 $-3x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$

Hyperbola a přímka

B

- 1/ Napište středovou rovnici hyperboly s ohnisky $E[-3;-1]$, $F[3;-1]$, hlavní poloosou $a = 2$.
Napište rovnice jejích asymptot
- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice splňují vztah:
 $4x^2 - 5y^2 + 24x + 20y + 36 = 0$
Určete všechny důležité body a přímky této množiny /ohniska, střed, vrcholy, asymptoty/.
- 3/ Napište rovnice všech tečen hyperboly $2(x + 2)^2 - 9(y - 4)^2 = 18$, které jsou kolmé k přímce p :
 $2x + y - 7 = 0$.

Použité vztahy:

Hyperbola s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a středem $S[m;n]$ má rovnici: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$,

rovnice asymptot této hyperboly jsou $y - n = \frac{b}{a} \cdot (x - m)$ nebo $y - n = -\frac{b}{a} \cdot (x - m)$.

Hyperbola s hlavní osou rovnoběžnou s osou y a středem $S[m;n]$ má rovnici: $-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$,

rovnice asymptot této hyperboly jsou $y - n = \frac{a}{b} \cdot (x - m)$ nebo $y - n = -\frac{a}{b} \cdot (x - m)$

Pro hyperbolu vždy platí: $a^2 + b^2 = e^2$

Tečna rovnoběžná s přímkou může mít normálový vektor jako tato přímka, tečna kolmá k přímce má normálový vektor kolmý k normálovému vektoru přímky.

Směrnicový tvar přímky je $y = kx + q$, kde k je směrnice přímky.

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie – RNDr. Milan Kočandrle, CSc.,
Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., r.1995, ISBN 80-7196-120-5

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag
Hrubý, Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-020-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra
Petáková, 1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na
VŠ – RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

Řešení: A

- 1/ Napište osovou rovnici hyperboly s ohnisky $E[-3;2]$, $F[3;2]$, hlavní osou $2a = 4$.
Napište rovnice asymptot dané hyperboly.

Z polohy ohnisek plyne, že $2e = 6$, tedy $e = 3$. Velikost vedlejší poloosy $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Hyperbola má osovou rovnici: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, střed má souřadnice

$S[0;2]$, po dosazení do rovnice hyperboly dostáváme rovnici: $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

Rovnice asymptot dané hyperboly jsou $y - n = \frac{b}{a} \cdot (x - m)$ nebo $y - n = -\frac{b}{a} \cdot (x - m)$. Po

dosazení dostaneme rovnice asymptoty u: $y - 2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x$, tedy $y = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x + 2$ a

$$u': y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x + 2$$

- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice splňují vztah:
 $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$. Určete všechny důležité body této množiny /ohniska, středy, vrcholy, asymptoty/.

Upravíme danou rovnici na středový tvar doplněním na čtverec:

$$9(x-3)^2 - 16(y-2)^2 = -1 - 64 + 81 = 16$$

Po vydělení 16 získáme rovnici $\frac{(x-3)^2}{\frac{16}{9}} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$, což je rovnice hyperboly se středem

$S[3;2]$, hlavní osou o rovnoběžnou s osou x , $a = \frac{4}{3}$, $b = 1$, $e = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{5}{3}$.

Ohniska hyperboly jsou $E\left[\frac{4}{3};2\right]$, $F\left[\frac{14}{3};2\right]$, vrcholy $A\left[\frac{5}{3};2\right]$, $B\left[\frac{13}{3};2\right]$

asymptoty u: $y - 2 = \frac{3}{4} \cdot (x - 3)$, tedy $y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4}$ a $u': y = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{17}{4}$

Matematika III/2-8-2-14 – příloha 4

- 3/ Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice splňují vztah:
 $-3x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$

Upravíme danou rovnici na středový tvar doplněním na čtverec:

$-3x^2 + (y + 1)^2 - 1 + 1 = 0$, levou stranu rovnice rozložíme na součin podle vzorce $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, čímž získáme rovnici $(y + 1 + \sqrt{3}x)(y + 1 - \sqrt{3}x) = 0$.

Hledanou množinou bodů jsou tedy 2 různoběžky $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ a $-\sqrt{3}x + y + 1 = 0$, které tvoří singulární hyperbolu.

Řešení: B

- 1/ Napište středovou rovnici hyperboly s ohnisky $E[-3;-1]$, $F[3;-1]$, hlavní poloosou $a = 2$.
Napište rovnice jejích asymptot

Z polohy ohnisek plyne, že $2e = 6$, tedy $e = 3$. Velikost vedlejší poloosy $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Hyperbola má středovou rovnici: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, střed má souřadnice

$S[0;-1]$, po dosazení do rovnice hyperboly dostáváme rovnici: $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$

Rovnice asymptot dané hyperboly jsou $y - n = \frac{b}{a} \cdot (x - m)$ nebo $y - n = -\frac{b}{a} \cdot (x - m)$. Po

dosazení dostaneme rovnice asymptoty u: $y + 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x$, tedy $y = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x - 1$ a

$$u': y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x - 1$$

- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice splňují vztah:
 $4x^2 - 5y^2 + 24x + 20y + 36 = 0$
Určete všechny důležité body a přímky této množiny / ohniska, střed, vrcholy, asymptoty/.

Upravíme danou rovnici na středový tvar doplněním na čtverec:

$$4 \cdot (x + 3)^2 - 5 \cdot (y - 2)^2 = -36 + 36 - 20 = -20$$

Po vydělení -20 získáme rovnici $-\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$, což je rovnice hyperboly se středem

$S[-3;2]$, hlavní osou o rovnoběžnou s osou y , $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $e = \sqrt{4+5} = 3$.

Ohniska hyperboly jsou $E[-3;5]$, $F[-3;-1]$, vrcholy $A[-3;4]$, $B[-3;0]$,

asymptoty u: $y - 2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (x + 3)$, tedy $u: y = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2$,

$$u': y = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2$$

- 3/ Napište rovnice všech tečen hyperboly $2(x+2)^2 - 9(y-4)^2 = 18$, které jsou kolmé k přímce p :
 $2x + y - 7 = 0$.

Tečnu t kolmou k přímce p lze napsat ve tvaru $t: x - 2y + c = 0$. Z této rovnice vyjádříme
 $x = 2y - c$.

Matematika III/2-8-2-14 – příloha 6

Společné body tečny t a hyperboly určíme řešením soustavy rovnice elipsy a tečny. Výraz $x = 2y - c$ dosadíme do rovnice hyperboly a dostaneme rovnici

$$2(2y - c + 2)^2 - 9(y^2 - 8y + 16) - 18 = 0, \text{ tedy } -y^2 + y(88 - 8c) + 2c^2 - 8c - 154 = 0.$$

Protože tečna má s křivkou právě jeden společný bod, je diskriminant této rovnice

$$D = 72c^2 - 1440c + 7128 = 0, \text{ odtud } c = 11 \text{ nebo } c' = 9.$$

Existují tedy 2 tečny požadované vlastnosti, $t: x - 2y + 11 = 0$ a $t': x - 2y + 9 = 0$