



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-2-15
Anotace	Dvě varianty procvičovacích či testových textů z látky PARABOLA A JEJÍ TEČNY s vypracovaným početním řešením a použitými vztahy /6 příloh/.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4.ročník, třída 4.B, 4.A a 8.E, dne 11.1.2013 , Matematický seminář

Parabola a její tečny

A

- 1/ a) Parabola je dána rovnicí $(y-1)^2 = 12(x+2)$. Vypočtěte souřadnice jejího ohniska F a rovnici řídící přímky d.
b) Napište rovnice všech tečen paraboly z a) , které jsou rovnoběžné s přímkou r: $x - y + 2 = 0$.
- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice x a y platí:
 $2x^2 + 4x - 3y - 1 = 0$, načrtněte ji a určete všechny její důležité body a přímky.

Parabola a její tečny

B

- 1/ a) Je dáno: F $[0; -6]$, d: $y = 0$. Napište vrcholovou rovnici paraboly s ohniskem F a řídící přímkou d.
b) Napište rovnice všech tečen paraboly z a) , které jsou kolmé k přímce q: $x - 4y + 1 = 0$.
- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice x a y platí:
 $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$, načrtněte ji a určete všechny její důležité body a přímky.

Parabola a její tečny

C

- 1/ a) Je dáno: F $[-6; 0]$, d: $x = 0$. Napište vrcholovou rovnici paraboly s ohniskem F a řídící přímkou d.
b) Napište rovnice všech tečen paraboly z a) , které jsou kolmé k přímce q: $x - 4y + 1 = 0$.
- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice x a y platí:
 $4x^2 + 8x - 2y - 2 = 0$, načrtněte ji a určete všechny její důležité body a přímky.

Použité vztahy:

Parabola je určena rovnicí $(x-v)^2 = \pm 2p \cdot (y-w)$, je-li grafem kvadratické funkce, nebo rovnicí $(y-w)^2 = \pm 2p \cdot (x-v)$, není-li grafem kvadratické funkce, kde vrchol je $V[v; w]$, parametr p je vzdálenost ohniska F od řídící přímky d .

Tečna rovnoběžná s přímkou má stejný normálový vektor jako přímka, tečna kolmá k přímce má normálový vektor kolmý k normálovému vektoru přímky.

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie – RNDr. Milan Kočandrle, CSc.,
Doc. RNDr. Leo Boček, CSc., r.1995, ISBN 80-7196-120-5

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag
Hrubý, Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-020-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra
Petáková, 1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na
VŠ – RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

Řešení: A

1/ a) Parabola je dána rovnicí $(y-1)^2 = 12(x+2)$. Vypočtete souřadnice jejího ohniska F a rovnici řídící přímky d.

b) Napište rovnice všech tečen paraboly z a), které jsou rovnoběžné s přímkou r: $x - y + 2 = 0$.

a) Z umístění paraboly vyplývá, že je její vrchol $V[-2;1]$ a parametr $p = 6$ /vzdálenost bodu F od řídící přímky d/, $\frac{p}{2} = 3$, parabola není grafem kvadratické funkce, má řídící přímku vlevo od V ve vzdálenosti 3 a ohnisko vpravo od V ve vzdálenosti 3. Proto je ohnisko F $[1;1]$ a řídící přímka d má rovnici $x = -5$

b) Protože tečna t má být rovnoběžná s přímkou r: $x - y + 2 = 0$, dá se její rovnice zapsat tvarem $x - y + c = 0$, tedy $x = y - c$.

Společné body tečny t a paraboly určíme řešením soustavy rovnice paraboly a tečny:

$x = y - c$ dosadíme do rovnice paraboly a dostaneme rovnici $(y - 1)^2 = 12(y - c + 2)$, tedy $y^2 - 14y - 23 + 12c = 0$. Protože tečna má s křivkou právě jeden společný bod, je diskriminant této rovnice $D = 196 + 92 - 48c = 0$, odtud $c = 6$. Rovnice tečny t je $x - y + 6 = 0$.

2/ Určete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice x a y platí:
 $2x^2 + 4x - 3y - 1 = 0$, načrtněte ji a určete všechny její důležité body a přímky.

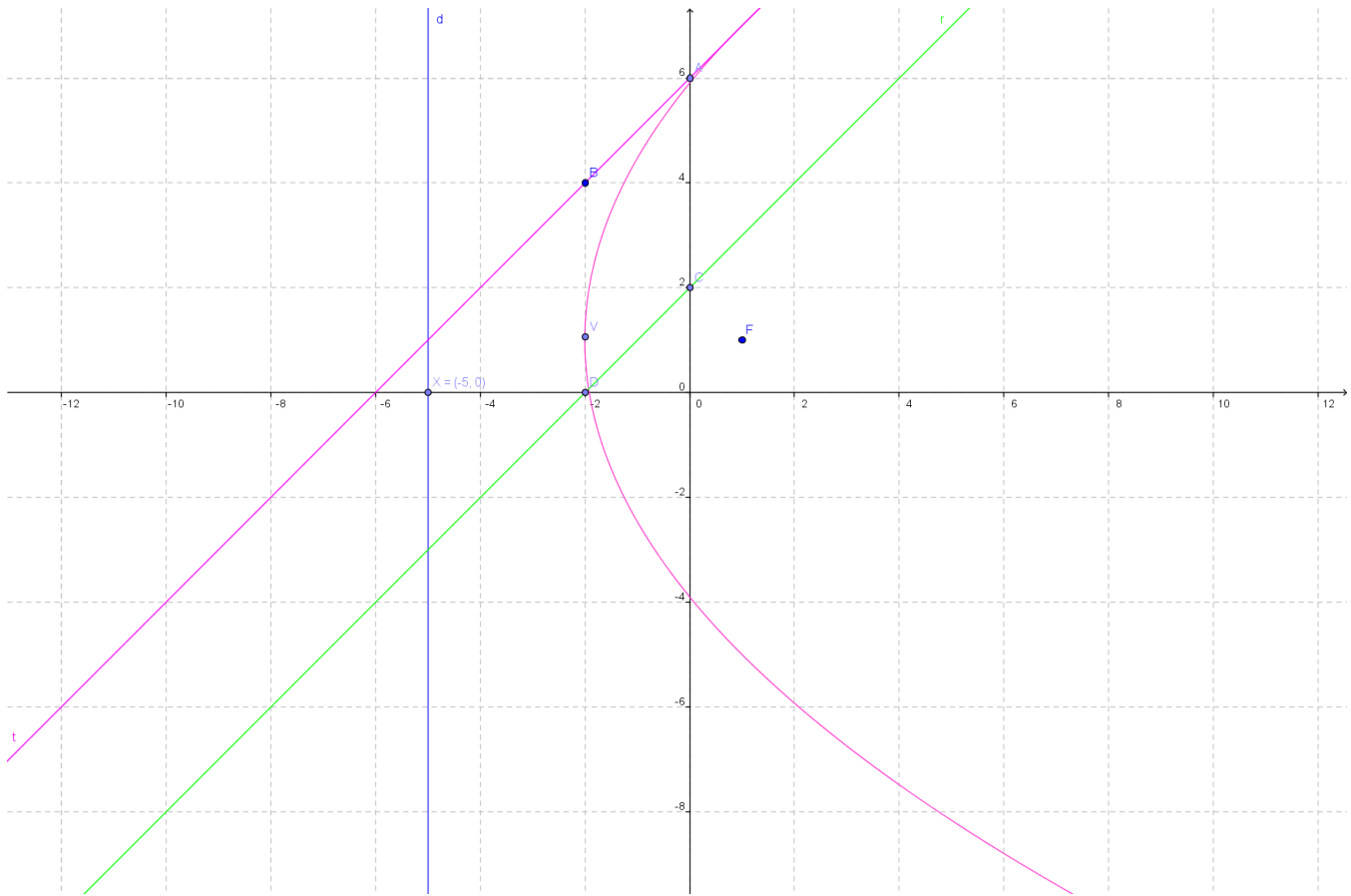
Upravíme danou rovnici na vrcholový tvar doplněním na čtverec: $2x^2 + 4x - 3y - 1 = 0$

$2(x + 1)^2 = 3y + 3$, tedy $(x + 1)^2 = \frac{3}{2}(y + 1)$, tedy je její vrchol $V[-1;-1]$.

Parabola je tedy grafem kvadratické funkce s minimem, $2p = \frac{3}{2}$, $\frac{p}{2} = \frac{3}{8}$. Z umístění paraboly

vyplývá, že řídící přímka d má rovnici: $y = -\frac{11}{8}$ a ohnisko F $[-1;\frac{5}{8}]$

Matematika III/2-8-2-15 – příloha 4



Řešení: B

1/ a) Je dáno: $F [0;-6]$, $d: y = 0$. Napište vrcholovou rovnici paraboly s ohniskem F a řídící přímkou d .

b) Napište rovnice všech tečen paraboly z a), které jsou kolmé k přímce $q: x - 4y + 1 = 0$.

a) Z umístění paraboly vyplývá, že je její vrchol $V [0;-3]$ a parametr $p = 6$ /vzdálenost bodu F od řídící přímky d /, $2p = 12$, parabola je grafem kvadratické funkce, která má maximum -3 v bodě 0 . Parabola je tedy určena rovnicí $(x-v)^2 = -2p.(y-w)$, kde je vrchol $V[v;w]$, proto vrcholová rovnice dané paraboly je $x^2 = -12.(y + 3)$

b) Protože tečna t má být kolmá k přímce $q: x - 4y + 1 = 0$, dá se její rovnice zapsat tvarem $4x + y + c = 0$, tedy

$y = -4x - c$. Společné body tečny t a paraboly určíme řešením soustavy rovnice paraboly a tečny.

$y = -4x - c$ dosadíme do rovnice paraboly a dostaneme rovnici $x^2 = -12.(-4x - c + 3)$, tedy

$x^2 - 48x + 36 - 12c = 0$. Protože tečna má s křivkou právě jeden společný bod, je diskriminant této rovnice $D = 2160 + 6c = 0$, odtud $c = -45$. Rovnice tečny t je $4x + y - 45 = 0$.

2/ Určete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice x a y platí:

$2x^2 + 4x - y - 1 = 0$, načrtněte ji a určete všechny její důležité body a přímky.

Upravíme danou rovnici na vrcholový tvar doplněním na čtverec: $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$, $2(x + 1)^2 = y + 3$,

$(x + 1)^2 = \frac{1}{2}(y + 3)$, tedy je její vrchol $V[-1;-3]$.

Parabola je tedy grafem kvadratické funkce s minimem, $2p = \frac{1}{2}$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{8}$. Z umístění paraboly

vyplývá, že řídící přímka d má rovnici: $y = -\frac{25}{8}$ a ohnisko $F\left[-1; \frac{-23}{8}\right]$

Řešení: C

- 1/ a) Je dáno: $F [0;-6]$, $d: x = 0$. Napište vrcholovou rovnici paraboly s ohniskem F a řídící přímkou d .
b) Napište rovnice všech tečen paraboly z a) , které jsou kolmé k přímce $q: x - 4y + 1 = 0$.

a) Z umístění paraboly vyplývá, že je její vrchol $V [-3;0]$ a parametr $p = 6$ /vzdálenost bodu F od řídící přímky d /, $2p = 12$, parabola není grafem kvadratické funkce. Parabola je tedy určena rovnicí $(y - w)^2 = -2p \cdot (x - v)$, kde je vrchol $V [v;w]$, proto vrcholová rovnice dané paraboly je $y^2 = -12 \cdot (x + 3)$

b) Protože tečna t má být kolmá k přímce $q: x - 4y + 1 = 0$, dá se její rovnice zapsat tvarem $4x + y + c = 0$, tedy $y = -4x - c$. Společné body tečny t a paraboly určíme řešením soustavy rovnice paraboly a tečny.

$y = -4x - c$ dosadíme do rovnice paraboly $y^2 = -12 \cdot (x + 3)$ a dostaneme rovnici $(-4x - c)^2 = -12 \cdot (x + 3)$, tedy $16x^2 + x(8c + 12) + c^2 + 36 = 0$. Protože tečna má s křivkou právě jeden společný bod, je diskriminant této rovnice $D = 192c - 2160 = 0$, odtud $c = 11,25$. Rovnice tečny t je $4x + y + 11,25 = 0$.

- 2/ Určete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice x a y platí: $4x^2 + 8x - 2y - 2 = 0$, načrtněte ji a určete všechny její důležité body a přímky.

Upravíme danou rovnici vydělením 2 na $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$, pak na vrcholový tvar doplněním na čtverec: $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$, $2(x + 1)^2 = y + 3$, $(x + 1)^2 = \frac{1}{2}(y + 3)$, tedy je její vrchol $V [-1;-3]$.

Parabola je tedy grafem kvadratické funkce s minimem, $2p = \frac{1}{2}$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{8}$. Z umístění paraboly

vyplývá, že řídící přímka d má rovnici: $y = -\frac{25}{8}$ a ohnisko $F \left[-1; -\frac{23}{8} \right]$