Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, **Název projektu:** Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg. č.: CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2-8-2-2
Anotace	Trigonometrie - obecný trojúhelník Samostatná práce, procvičení učiva
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	2. ročník vyššího gymnázia, 6.F 12.3.2013, Matematika

Trigonometrie

= geometrie trojúhelníka,
řešení úloh o trojúhelnících

Řešit trojúhelník = dopočítat chybějící rozměry (délky stran, velikosti vnitřních úhlů, případně obsah)

Zopakovat vlastnosti trojúhelníků, vztahy mezi stranami a úhly, základní pojmy z planimetrie

Při výpočtech využívat:

- Definice a vlastnosti goniometrických funkcí
- Vztahy z planimetrie (např. věta: Proti delší straně leží větší úhel a proti většímu úhlu větší strana.)
- Sinová věta: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$
- Kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ **(+CZ)**
- Vzorce pro obsah trojúhelníku

$S = \frac{1}{2}av_a$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ **(+CZ)**

$S = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$ *Heronův vzorec*

$S = \frac{abc}{4r}$ $S = \rho s$

Zadání

1. V ΔABC je dáno: $a = 21cm, b = 27\,cm, \alpha = 30°$.
Vypočítej velikosti stran a vnitřních úhlů ΔABC a jeho obsah.

2. V ΔABC je dáno: $a = 7{,}8\,m, b = 4{,}6\,m, c = 11{,}2\,m$.
Vypočítej vnitřní úhly a obsah ΔABC, délku těžnice t_a.

3. Budova vysoká $17\,m$ je vzdálena $30\,m$ od břehu řeky. Z vodorovné střechy této budovy je vidět šířku řeky v zorném úhlu $\varphi = 15°$.
Vypočítej, jak široká je řeka?

4. Z kopce $155\,m$ nad horizontální rovinou je vidět vrchol továrního komínu v hloubkovém úhlu $\alpha = 18°30'$ a jeho patu v hloubkovém úhlu $\beta = 29°$.
Vypočítej, jak vysoký je komín?

5. V čtyřúhelníku $ABCD$ je dáno:
$a = 8\,cm, b = 6\,cm, \alpha = 50°, \beta = 120°, \delta = 90°$.
Vypočítej velikosti stran a vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$.

DÚ

6. V ΔABC je dáno: $a = 7{,}6\,m, \beta = 62°, S = 15{,}2\,m^2$.
Vypočítej zbývající vnitřní úhly v ΔABC a jeho obvod.

7. Síly o velikostech $108\,N$ a $65\,N$ působí v jednom bodě a svírají úhel $\varphi = 132°30'$.
Vypočítej velikost jejich výslednice F.

Řešení

1. $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad \sin\beta=\sin\alpha\cdot\dfrac{b}{a}$

$$\sin\beta=\sin 30°\cdot\frac{27}{21} \quad\Rightarrow\quad \beta_1=40°\vee\beta_2=140°$$

úloha má 2 řešení (oba úhly β mohou existovat)

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad c=\sin\gamma\cdot\frac{a}{\sin\alpha}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot ab\sin\gamma$$

I. řešení $\beta_1=40°$, $\gamma_1=110°$

$$c_1=\sin 110°\cdot\frac{21}{\sin 30°}=39{,}5\,(cm)$$

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 27\cdot\sin 110°=266{,}4\,(cm^2)$$

II. řešení $\beta_2=140°$, $\gamma_2=10°$

$$c_2=\sin 10°\cdot\frac{21}{\sin 30°}=7{,}3\,(cm)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 27\cdot\sin 10°=49{,}2\,(cm^2)$$

Odpověď: Existují dva ΔABC a jejich zbývající rozměry jsou …

2.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4{,}6^2+11{,}2^2-7{,}8^2}{2\cdot 4{,}6\cdot 11{,}2} \Rightarrow \underline{\alpha = 33°40'}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{7{,}8^2+11{,}2^2-4{,}6^2}{2\cdot 7{,}8\cdot 11{,}2} \Rightarrow \underline{\beta = 19°5'}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{7{,}8^2+4{,}6^2-11{,}2^2}{2\cdot 7{,}8\cdot 4{,}6} \Rightarrow \underline{\gamma = 127°15'}$$

Zkouška: $\alpha+\beta+\gamma = 33°40'+19°5'+127°15' = 180°$

Obsah: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 11{,}8$

$$S = \sqrt{11{,}8\cdot 4\cdot 7{,}2\cdot 0{,}6} = 14{,}28\,(cm^2)$$

$$\underline{S = 14{,}28\,cm^2}$$

Těžnice:

$$t_a{}^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c\frac{a}{2}\cos\beta = 11{,}2^2 + 3{,}9^2 - 11{,}2\cdot 7{,}8\cdot\cos 19°5'$$

$$\Rightarrow \quad \underline{t_a = 7{,}6\,cm}$$

Odpověď: Vnitřní úhly v ΔABC mají velikost … ,

délka $\underline{t_a = 7{,}6\,cm}$ a obsah $\underline{S = 14{,}28\,cm^2}$.

3. $tg\alpha = \frac{17}{30} \quad \Rightarrow \quad \alpha =$

$$x^2 = 17^2 + 30^2 = 289 + 900 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1189}$$

$$\frac{d}{\sin 15°} = \frac{x}{\sin \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad d = \sin 15° \cdot \frac{\sqrt{1189}}{\sin(\alpha - 15°)} = 35{,}55(m)$$

$$\underline{d = 35{,}55\, m}$$

Odpověď: Šířka řeky je asi $d = 35{,}55\, m$.

4. $tg\beta = \frac{155}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{155}{tg29°}$

$$tg\alpha = \frac{x}{d} \quad \Rightarrow \quad x = d \cdot tg18°30' = 155 \cdot \frac{tg18°30'}{tg29°}$$

$$v = 155 - x = 61{,}43\,(m)$$

$$\underline{v = 61{,}43\, m}$$

Odpověď: Výška komínu je asi $v = 61{,}43\, m$.

.

5. $\gamma = 180° - (50° + 120° + 90°) = 100°$

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$

$e^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 120° = 64 + 36 + 48 = 148 \Rightarrow e = \sqrt{148}$

$\frac{e}{\sin 120°} = \frac{b}{\sin \alpha_1} \Rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{148}} \Rightarrow \alpha_1 =$

$\alpha_2 = 50° - \alpha_1$

$\sin \alpha_2 = \frac{c}{e} \Rightarrow c = \sqrt{148} \cdot \sin \alpha_2 = \underline{5{,}09\,(cm)}$

$\cos \alpha_2 = \frac{d}{e} \Rightarrow d = \sqrt{148} \cdot \cos \alpha_2 = \underline{11{,}05\,(cm)}$

Odpověď: Zbývající strany čtyřúhelníku měří … a úhel $\gamma = 100°$.

DÚ

6. $S = \frac{1}{2} \cdot ac \sin \beta \Rightarrow c = \frac{2S}{a \sin \beta}$ $\underline{c = 4{,}53\ m}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$b^2 = 7{,}6^2 + c^2 - 2 \cdot 7{,}6 \cdot c \cdot \cos 62°$ $\underline{b = 6{,}78\ m}$

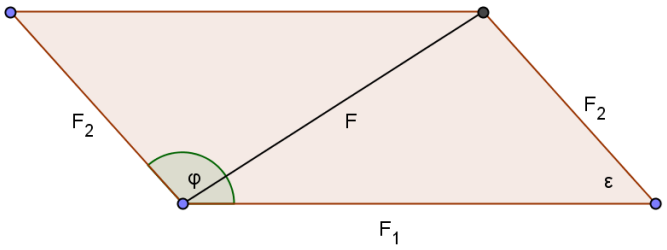
$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sin \alpha = \sin 62° \cdot \frac{7{,}6}{b}$ $\underline{\alpha = 81° 50'}$

$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b} \Rightarrow \sin \gamma = \sin 62° \cdot \frac{c}{b}$ $\underline{\gamma = 36° 10'}$

$o = a + b + c = 18{,}91(m)$ $\underline{o = 18{,}91\ m}$

Odpověď: ….

7. $\varphi = 132°30' \Rightarrow \varepsilon = 47°30'$



$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \varepsilon$

$F^2 = 108^2 + 65^2 - 2 \cdot 108 \cdot 65 \cos 47{,}5° \Rightarrow$ $\underline{F = 80\ N}$

Odpověď: ….

- Použité nákresy jsou vlastní sestrojené v programu GeoGebra.

- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie.* 3., vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-203-1.

- POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*, 4. vydání, Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-174-4.

- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.

- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.