



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Fikejzlová Hana
Číslo sady	III/2-8-2-04
Anotace	Čtyři varianty písemné prověrky z látky KRUH A JEHO ČÁSTI, ÚHLY V KRUHU, kapitoly GEOMETRIE prvního ročníku, s vypracovaným početním řešením a použitými vztahy /6 příloh/. Předpokládaný čas vypracování 15 min. Povolené pomůcky: kalkulačka pro 1. ročník u varianty A, B, v ostatních případech bez kalkulačky
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	1. ročník, třída 1.B a 5.E, dne 11.5.2012, Matematika

Kruh a jeho části, úhly v kruhu /s kalkulačkou pro 1.roč., bez kalkulačky pro vyšší roč./ ...A

- 1/ Vypočtete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 1, 4, 9 na hodinovém ciferníku.
- 2/ Je dán pravidelný osmiúhelník ABCDEFGH vepsaný do kružnice s poloměrem 4 cm.
a/ Vypočtete obsah menší kruhové úseče omezené touto kružnicí a úhlopříčkou HF.
b/ Vypočtete délku většího oblouku omezeného body H a F na této kružnici.

Kruh a jeho části, úhly v kruhu /s kalkulačkou pro 1.roč., bez kalkulačky pro vyšší roč./ ...B

- 1/ Vypočtete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 5, 2, 8 na hodinovém ciferníku.
- 2/ Je dán pravidelný osmnáctiúhelník ABCDEFGHI... vepsaný do kružnice s poloměrem 6 cm.
a/ Vypočtete obsah menší kruhové úseče omezené touto kružnicí a tětivou HE.
b/ Vypočtete délku většího oblouku omezeného body H a E na této kružnici.

Kruh a jeho části, úhly v kruhu /bez kalkulačky/ ...C

- 1/ Vypočtete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 1, 3, 8 na hodinovém ciferníku.
- 2/ Je dán pravidelný osmnáctiúhelník ABCDEFGHI... vepsaný do kružnice s poloměrem 4 cm.
a/ Vypočtete obsah menší kruhové výseče omezené touto kružnicí a úsečkami HS a FS, kde S je střed osmnáctiúhelníku.
b/ Vypočtete délku většího oblouku omezeného body H a F na této kružnici.

Kruh a jeho části, úhly v kruhu /bez kalkulačky/ ...D

- 1/ Vypočtete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 3, 7, 11 na hodinovém ciferníku.
- 2/ Je dán pravidelný osmiúhelník ABCDEFGH vepsaný do kružnice s poloměrem 6 cm.
a/ Vypočtete obsah menší kruhové výseče, která je omezená touto kružnicí a úsečkami HS a ES, je-li S střed osmiúhelníku.
b/ Vypočtete délku většího oblouku omezeného body H a E na této kružnici.

Použité vztahy:

Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku, Pythagorova věta.

Vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku, pravidelného mnohoúhelníku.

Pojmy tětíva, středový a obvodový úhel v kruhu, vztah pro tyto úhly příslušné ke stejnému kruhovému oblouku: velikost obvodového úhlu je polovina velikosti středového úhlu.

Pojmy kruhová výseč a kruhová úseč,

délka kruhového oblouku příslušného ke středovému úhlu α : $l = \frac{2\pi \cdot r}{360} \cdot \alpha$,

obsah kruhové výseče příslušné k úhlu α : $S = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha$,

obsah trojúhelníku určeného dvěma stranami b a c a úhlem α těmito stranami sevřeného:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Použité zdroje:

Matematika pro gymnázia - Planimetrie – RNDr. Eva Pomykalová, r.1993,
ISBN 80-7196-174-4

Matematika – Maturitní minimum /Sbírka úloh pro střední školy/ - Josef Kubát, Dag Hrubý,
Josef Pilgr/, r. 1996, ISBN 80-7196-030-6

Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy – Jindra
Petáková, 1998, ISBN 80-7196-099-3

Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na VŠ
– RNDr. Josef Kubát, r.1993, ISBN 80-85605-27-9

Řešení:**A**

- 1/** Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 1, 4, 9 na hodinovém ciferníku.

Pro obvodový úhel α u vrcholu 9 vypočteme velikost příslušného úhlu středového ω :

$$\omega = 360^\circ : 12 \cdot 3 = 30^\circ \cdot 3 = 90^\circ, \quad \underline{\alpha \equiv \frac{\omega}{2} = 45^\circ}.$$

Analogicky pro úhle β u vrcholu 1: $\omega = 360^\circ : 12 \cdot 5 = 30^\circ \cdot 5 = 150^\circ, \quad \underline{\beta \equiv \frac{\omega}{2} = 75^\circ},$

Zbývající úhel γ u vrcholu 4 vypočteme pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku:

$$\underline{\gamma \equiv 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ}.$$

- 2/** Je dán pravidelný osmiúhelník ABCDEFGH vepsaný do kružnice s poloměrem 4 cm.
 a/ Vypočtěte obsah menší kruhové úseče omezené touto kružnicí a úhlopříčkou HF.
 b/ Vypočtěte délku většího oblouku omezeného body H a F na této kružnici.

a/ V pravidelném osmiúhelníku ABCDEFGH obsah menší kruhové úseče omezené jemu opsanou kružnicí a úhlopříčkou HF vypočítáme jako rozdíl obsahu příslušné kruhové výseče a rovnoramenného trojúhelníku HFS, kde S je střed osmiúhelníku, středový úhel α přísluší ke dvěma stranám osmiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ : 8 \cdot 2 = 90^\circ$.

Proto hledaný obsah kruhové úseče vypočteme:

$$\underline{S \equiv \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha = \frac{\pi \cdot 4^2}{360} \cdot 90 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 90^\circ = (4\pi - 8) \text{ (cm}^2\text{)}, \text{ tedy obsah dané menší kruhové úseče měří asi } 4,57 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b/ středový úhel α přísluší k šesti stranám osmiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$, délka kruhového oblouku příslušného k tomuto většímu středovému úhlu α :

$$\underline{l \equiv \frac{2\pi \cdot r}{360} \cdot \alpha = \frac{2\pi \cdot 4}{360} \cdot 270^\circ = 6\pi \text{ (cm)}, \text{ tedy délka kruhového oblouku příslušného k tomuto většímu středovému úhlu měří asi } 18,85 \text{ (cm)}.$$

Řešení: B

1/ Vypočtete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 5, 2, 8 na hodinovém ciferníku.

Pro obvodový úhel α u vrcholu 8 vypočteme velikost příslušného úhlu středového ω :

$$\omega = 360^\circ : 12 \cdot 3 = 30^\circ \cdot 3 = 90^\circ, \quad \underline{\alpha \equiv \frac{\omega}{2} = 45^\circ}.$$

Analogicky pro úhle β u vrcholu 2: $\omega = 360^\circ : 12 \cdot 3 = 30^\circ \cdot 3 = 90^\circ, \quad \underline{\beta \equiv \frac{\omega}{2} = 45^\circ},$

Zbývající úhel γ u vrcholu 5 vypočteme pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku:

$\underline{\gamma \equiv 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ}$. Lze též využít Thaletovy věty, protože spojnice 82 je průměrem kružnice ciferníku.

2/ Je dán pravidelný osmnáctiúhelník ABCDEFGHI... vepsaný do kružnice s poloměrem 6 cm.

a/ Vypočtete obsah menší kruhové úseče omezené touto kružnicí a tětivou HE.

b/ Vypočtete délku většího oblouku omezeného body H a E na této kružnici.

a/ V pravidelném osmnáctiúhelníku ABCDEF... obsah menší kruhové úseče omezené jemu opsanou kružnicí a úhlopříčkou HE vypočítáme jako rozdíl obsahu příslušné kruhové výseče a rovnoramenného trojúhelníku HES, kde S je střed osmiúhelníku, středový úhel α přísluší ke třem stranám osmnáctiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ : 18 \cdot 3 = 20^\circ \cdot 3 = 60^\circ$. Proto hledaný obsah kruhové úseče vypočteme:

$$\underline{S \equiv \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin 60^\circ \equiv \underline{\underline{\left(6\pi - 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (\text{cm}^2)}}}, \text{ tedy}$$

obsah dané menší kruhové úseče měří asi 3,26 (cm²).

b/ středový úhel α přísluší k 15 stranám osmiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$, délka kruhového oblouku příslušného k tomuto většímu středovému úhlu α :

$$\underline{l \equiv \frac{2\pi \cdot r}{360} \cdot \alpha = \frac{2\pi \cdot 6}{360} \cdot 300^\circ = \underline{\underline{10\pi (\text{cm})}}}, \text{ tedy délka kruhového oblouku příslušného k tomuto většímu středovému úhlu měří asi } \underline{\underline{31,42 (\text{cm})}}.$$

Řešení: C

1/ Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 1, 3, 8 na hodinovém ciferníku.

Pro obvodový úhel α u vrcholu 8 vypočteme velikost příslušného úhlu středového ω :

$$\omega = 360^\circ : 12 \cdot 2 = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ, \quad \underline{\alpha \equiv \frac{\omega}{2} = 30^\circ}.$$

Analogicky pro úhle β u vrcholu 1: $\omega = 360^\circ : 12 \cdot 5 = 30^\circ \cdot 5 = 150^\circ, \quad \underline{\beta \equiv \frac{\omega}{2} = 75^\circ},$

Zbývající úhel γ u vrcholu 3 vypočteme pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku:
 $\underline{\gamma \equiv 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ}.$

2/ Je dán pravidelný osmnáctiúhelník ABCDEFGHI... vepsaný do kružnice s poloměrem 4 cm.

a/ Vypočtěte obsah menší kruhové výseče omezené touto kružnicí a úsečkami HS a FS, kde S je střed osmnáctiúhelníku.

b/ Vypočtěte délku většího oblouku omezeného body H a F na této kružnici.

a/ V pravidelném osmnáctiúhelníku ABCDEF... středový úhel α přísluší ke dvěma stranám osmnáctiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ : 18 \cdot 2 = 20^\circ \cdot 2 = 40^\circ.$

Obsah menší kruhové výseče omezené jemu opsanou kružnicí a úsečkami HS a FS, kde S je střed osmnáctiúhelníku, vypočteme:

$$\underline{S \equiv \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 4^2}{360} \cdot 40 = \frac{16}{9} \pi \text{ (cm}^2\text{)}}.$$

b/ Středový úhel α přísluší k 16 stranám osmiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ,$
délka kruhového oblouku příslušného k tomuto většímu středovému úhlu α :

$$\underline{l \equiv \frac{2\pi \cdot 4}{360} \cdot \alpha = \frac{2\pi \cdot 4}{360} \cdot 320^\circ = \frac{64}{9} \pi \text{ (cm)}}.$$

Řešení: D

- 1/** Vypočtete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří číslice 3, 7, 11 na hodinovém ciferníku.
Pro obvodový úhel α u vrcholu 11 vypočteme velikost příslušného úhlu středového ω :
- $$\omega = 360^\circ : 12 \cdot 4 = 30^\circ \cdot 4 = 120^\circ, \quad \underline{\alpha \equiv \frac{\omega}{2} = 60^\circ}.$$
- Analogicky pro úhle β u vrcholu 3: $\omega = 360^\circ : 12 \cdot 4 = 30^\circ \cdot 4 = 120^\circ, \quad \underline{\beta \equiv \frac{\omega}{2} = 60^\circ},$
Zbývající úhel γ u vrcholu 4 vypočteme pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku:
 $\underline{\gamma \equiv 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ}.$
Lze též využít toho, že daný trojúhelník 3, 7, 11 je rovnostranný, má tedy všechny vnitřní úhly velikosti 60° .

- 2/** Je dán pravidelný osmiúhelník ABCDEFGH vepsaný do kružnice s poloměrem 6 cm.
a/ Vypočtete obsah menší kruhové výseče, která je omezená touto kružnicí a úsečkami HS a ES, je-li S střed osmiúhelníku.
b/ Vypočtete délku většího oblouku omezeného body H a E na této kružnici.

a/ V pravidelném osmiúhelníku ABCDEFGH středový úhel α přísluší ke třem stranám osmiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ : 8 \cdot 3 = 45^\circ \cdot 3 = 135^\circ$.

Obsah menší kruhové výseče omezené jemu opsanou kružnicí a úsečkami HS a ES, kde S je střed osmiúhelníku, vypočteme:

$$\underline{S \equiv \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 135 = 13,5\pi \text{ (cm}^2\text{)}}.$$

b/ Středový úhel α přísluší k 5 stranám osmiúhelníku měří $\alpha = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$,
délka kruhového oblouku příslušného k tomuto většímu středovému úhlu α :

$$\underline{l \equiv \frac{2\pi \cdot r}{360} \cdot \alpha = \frac{2\pi \cdot 6}{360} \cdot 225^\circ = \frac{15}{2} \pi \text{ (cm)} = 7,5\pi \text{ (cm)}}.$$