



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2-8-2-6
Anotace	Tělesa II Samostatná práce, procvičení učiva
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 4.A,B, 8.E, 28.11.2013, Matematický seminář

TĚLESA II - rotační tělesa

Zadání - samostatná práce

Postup při řešení:

- *náčrtek*
- *potřebné vzorce*
- *výpočet*
- *odpověď*

- 1) **Načrtněte** rotační válec, který vznikne rotací obdélníku o rozměrech 5 cm a 12 cm kolem jeho osy.

Kolik má úloha řešení?

Vypočítejte objem vzniklého tělesa.

- 2) Do rotačního kužele je vepsán rotační válec tak, že jeho dolní podstava leží v podstavě kuželu a výška je rovna polovině výšky kuželu.

Určete poměr objemů obou těles.

- 3) **Vypočítejte** objem a povrch rovnostranného kuželu, jehož výška $v = 9\text{ cm}$.

Zakreslete plášť rozvinutý do roviny.

- 4) Kruh o poloměru $r = 5\text{ cm}$ je společnou podstavou dvou kuželů, jejichž vrcholy leží v témže poloprostoru určeném rovinou podstavy. Vyšší kužel má v řezu úhel při vrcholu $\alpha = 60^\circ$ a nižší kužel $\beta = 75^\circ$.

Vypočítejte objem tělesa omezeného pláští obou kuželů.

- 5) Komolý rotační kužel má poloměry podstav 4 cm a 12 cm , výšku $v = 6\text{ cm}$. **Vypočítejte**
- objem a povrch kuželu, z něhož komolý kužel vznikl,
 - úhel při vrcholu kuželu v plášti rozvinutém do roviny.
- 6) **Vypočítejte** objem komolého kuželu, jehož podstavy jsou kruh opsaný a kruh vepsaný protilehlým stěnám krychle s hranou $a = 6\text{ cm}$.
- 7) **Vypočítejte** objem menší kulové úseče v kouli s poloměrem $r = 5\text{ cm}$, je-li poloměr řezu 4 cm .
- 8) Je dána koule s poloměrem $r = 8\text{ cm}$. Dvě navzájem rovnoběžné roviny dělí průměr v poměru $2 : 3 : 3$. **Vypočítejte** v dané kouli objem a povrch kulové vrstvy ohraničené těmito rovinami.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Výsledky a řešení

1) 2 řešení - rozměry:

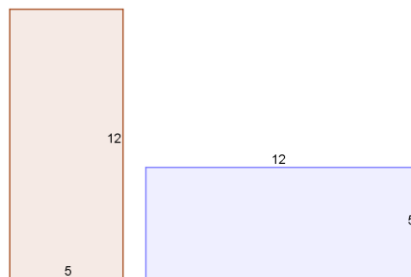
$$r_1 = 2,5 \text{ cm}, \quad v_1 = 12 \text{ cm}$$

$$r_1 = 6 \text{ cm}, \quad v_1 = 5 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 v$$

$$V_1 = \pi \frac{25}{4} \cdot 12 = 75\pi \text{ cm}^3 = 235,6 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \pi 36 \cdot 5 = 180\pi \text{ cm}^3 = 565,5 \text{ cm}^3$$



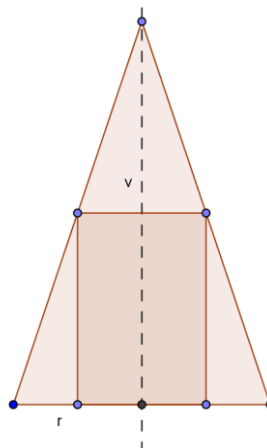
2) $V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ $V = \pi r^2 v$

Rozměry válce jsou

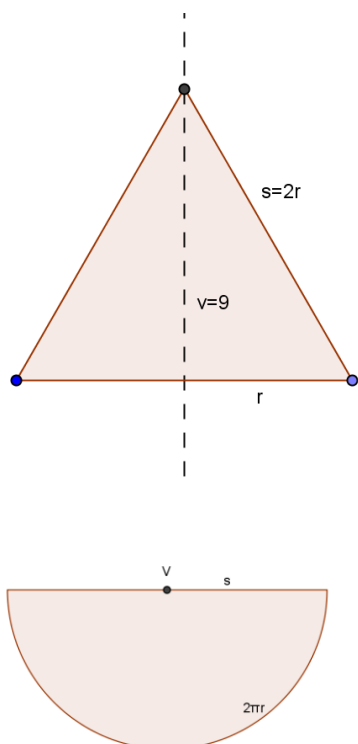
$$r_V = \frac{1}{2} r, \quad v_V = \frac{1}{2} v$$

$$V_V = \pi \frac{r^2}{4} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{8} \pi r^2 v$$

$$V_V : V_J = \frac{1}{8} \pi r^2 v : \frac{1}{3} \pi r^2 v = \frac{3}{8} = 3:8$$



3)



$$(2r)^2 - r^2 = 81$$

$$3r^2 = 81$$

$$r = 3\sqrt{3}$$

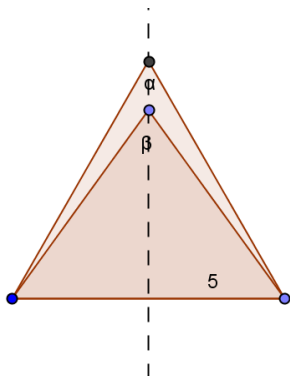
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 27 \cdot 9 = 81\pi \text{ cm}^3$$

$$S = \pi r^2 + \pi r s$$

$$S = \pi 27 + \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 81\pi \text{ cm}^2$$

4)



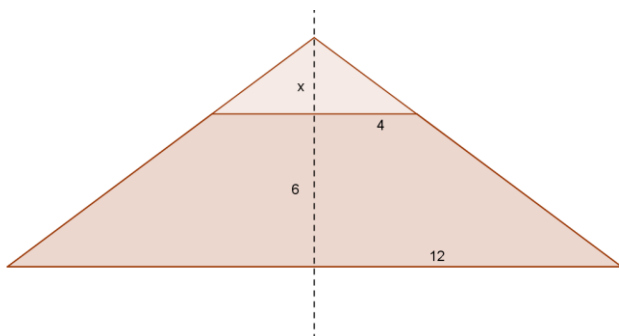
$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{5}{v_1} \Rightarrow v_1 = \frac{5}{\operatorname{tg} 30^{\circ}}$$

$$v_2 = \frac{5}{\operatorname{tg} 37,5^{\circ}}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v_1 - \frac{1}{3} \pi r^2 v_2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi 25 \left(\frac{5}{\operatorname{tg} 30^{\circ}} - \frac{5}{\operatorname{tg} 37,5^{\circ}} \right) = 56,13 \text{ cm}^3$$

5)



$$v = 6 + x$$

$$\frac{4}{12} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow x+6=3x$$

$$x=3 \Rightarrow v=9 \text{ cm}$$

$$s^2 = 81 + 144$$

$$s = 15 \text{ cm}$$

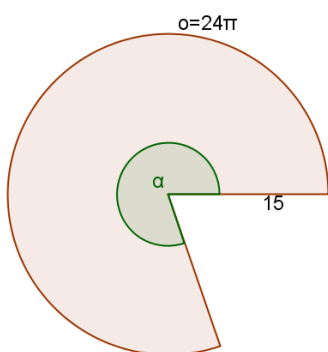
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

$$S = \pi r^2 + \pi r s$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 144 \cdot 9 = 432\pi \text{ cm}^3$$

$$S = \pi 144 + \pi \cdot 12 \cdot 15 = 324\pi \text{ cm}^2$$

$$o = l \Rightarrow 24\pi = \frac{2\pi \cdot 15}{360^\circ} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 288^\circ$$



6)

$$v = a = 6 \text{ cm}$$

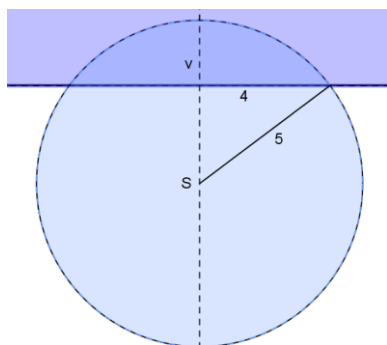
$$r_1 = \frac{1}{2} u = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$r_2 = \frac{1}{2} a = 3 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6 (18 + 9\sqrt{2} + 9) = \pi (27 + 9\sqrt{2}) = 124,8 \text{ cm}^3$$

7)



$$x = 5 - v$$

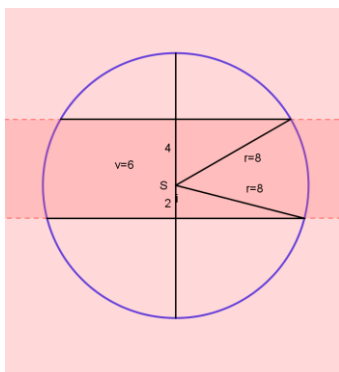
$$x^2 + 16 = 25$$

$$x = 3 \Rightarrow v = 2 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi v}{6} (3\rho^2 + v^2)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 2}{6} (3 \cdot 16 + 4) = \frac{52}{3} \pi = 54,45 \text{ cm}^3$$

8)



$$\rho_1^2 = 64 - 4 = 60$$

$$\rho_2^2 = 64 - 16 = 48$$

$$V = \frac{\pi v}{6} (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 6}{6} (3 \cdot 60 + 3 \cdot 48 + 36) = 360\pi = 1131 \text{ cm}^3$$

$$S = \pi \rho_1^2 + \pi \rho_2^2 + 2\pi v$$

$$s = \pi(60 + 48 + 2 \cdot 8 \cdot 6) = 204\pi = 641 \text{ cm}^2$$

Zadání - samostatná práce a DÚ (pro tisk)

- 1) **Načrtněte** rotační válec, který vznikne rotací obdélníku o rozměrech 5 cm a 12 cm kolem jeho osy.
Kolik má úloha řešení?
Vypočítejte objem vzniklého tělesa.
- 2) Do rotačního kužele je vepsán rotační válec tak, že jeho dolní podstava leží v podstavě kuželu a výška je rovna polovině výšky kuželu.
Určete poměr objemů obou těles.
- 3) **Vypočítejte** objem a povrch rovnostranného kuželu, jehož výška $v = 9\text{ cm}$.
Zakreslete plášť rozvinutý do roviny.
- 4) Kruh o poloměru $r = 5\text{ cm}$ je společnou podstavou dvou kuželů, jejichž vrcholy leží v témže poloprostoru určeném rovinou podstavy. Vyšší kužel má v řezu úhel při vrcholu $\alpha = 60^\circ$ a nižší kužel $\beta = 75^\circ$.
Vypočítejte objem tělesa omezeného pláští obou kuželů.
- 5) Komolý rotační kužel má poloměry podstav 4 cm a 12 cm , výšku $v = 6\text{ cm}$. **Vypočítejte**
 - a) objem a povrch kuželu, z něhož komolý kužel vznikl,
 - b) úhel při vrcholu kuželu v plášti rozvinutém do roviny.
- 6) **Vypočítejte** objem komolého kuželu, jehož podstavy jsou kruh opsaný a kruh vepsaný protilehlým stěnám krychle s hranou $a = 6\text{ cm}$.
- 7) **Vypočítejte** objem menší kulové úseče v kouli s poloměrem $r = 5\text{ cm}$, je-li poloměr řezu 4 cm .
- 8) Je dána koule s poloměrem $r = 8\text{ cm}$. Dvě navzájem rovnoběžné roviny dělí průměr v poměru $2 : 3 : 3$.
Vypočítejte v dané kouli objem a povrch kulové vrstvy ohraničené těmito rovinami.

- Použité nákresy jsou vlastní - sestrojené v programu GeoGebra.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*, upravené vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-164-7.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.