



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2-8-2-7
Anotace	Metrické úlohy na tělesech - stereometricky Samostatná práce a procvičení učiva
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	2. ročník vyššího gymnázia, 6.F, 17.5. 2013, Matematika

Metrické úlohy ve stereometrii

- odchylky

2 přímek, přímky od roviny, 2 rovin

- vzdálenosti

2 bodů, bodu od přímky, bodu od roviny
(2 rovnoběžných přímek, 2 rovnoběžných rovin)

Postup při řešení:

- *náčrt tělesa, trojúhelníky pro výpočty*
- *potřebné*
- *výpočet*

Zadání - samostatná práce (a DÚ)

- 1) Je dána krychle $ABCDEFGH = A-H$ o hraně a .
Zakreslete a určete odchylku přímky $u \leftrightarrow AH$ od
- a) roviny $\leftrightarrow CDG$
 - b) roviny $\leftrightarrow CDE$
 - c) přímky $\leftrightarrow BG$
 - d) přímky $\leftrightarrow BD$
 - e) přímky $\leftrightarrow AG$

2) V krychli $A-H$ o hraně a je daný bod $M = S_{CG}$.

Vypočítejte vzdálenost

a) bodů $|HM|$, $|AM|$,

b) bodu $M = S_{CG}$ od přímky $\leftrightarrow AB$

c) bodu $M = S_{CG}$ od přímky $\leftrightarrow BH$

Zakreslete a určete odchylku přímky $m \leftrightarrow AM$ od

d) roviny $\leftrightarrow ABC$

e) přímky $\leftrightarrow BG$

3) Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má výšku $v = 12\text{ cm}$ a obsah ΔACV je $S = 60\text{ cm}^2$.

Vypočítejte odchylku a) boční hrany od roviny podstavy,

b) boční stěny od roviny podstavy jehlanu.

Vypočítejte vzdálenost c) bodu A od přímky $\leftrightarrow CV$.

4) DÚ - Pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ má podstavu vepsanou do kruhu s průměrem 12 cm a tělesovou výšku $v = 10\text{ cm}$.

Vypočítejte odchylku a) boční hrany od roviny podstavy,

b) boční stěny od roviny podstavy,

c) dvou protějších bočních stěn jehlanu.

Vypočítejte vzdálenost d) bodů $|AC|$, $|AV|$,

e) bodu A od přímky $\leftrightarrow DV$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Výsledky a řešení

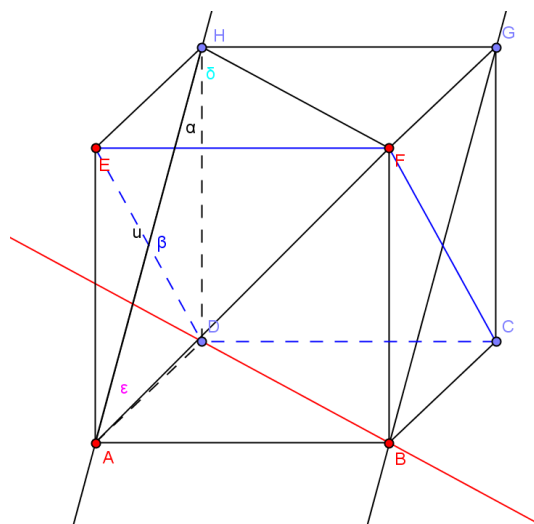
1) krychle $A-H$

a) v $\triangle ADH$ úhel α
 $\alpha = 45^\circ$

b) v $\triangle CDE$ úhel β
 $\beta = 90^\circ$ ($ED \perp AH$)

c) $\leftrightarrow BG \parallel \leftrightarrow AH$
 $\gamma = 0^\circ$

d) $\leftrightarrow BD, \leftrightarrow AH$ jsou mimoběžné
 $\leftrightarrow BD \parallel \leftrightarrow FH$
 v $\triangle AFH$ - rovnostranný
 $\delta = 60^\circ$



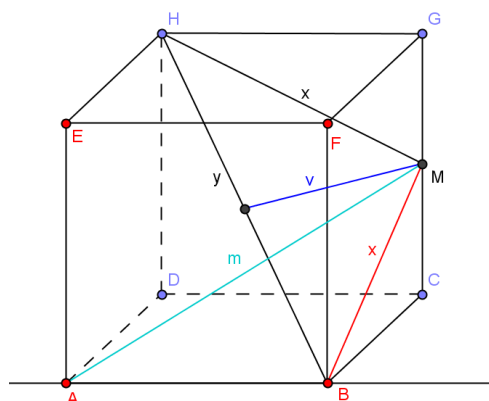
e) v $\triangle AGH$ úhel ε $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a}{a\sqrt{2}}$ $\varepsilon = 35^\circ 16'$

2) krychle $A-H$

a) $|HM| = x$

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$|HM| = x = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$



$$|AM| = m \text{ v } \triangle ACM$$

$$m^2 = u^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$$

$$|AM| = m = \frac{3a}{2}$$

b) $|M \leftrightarrow AB| = x$

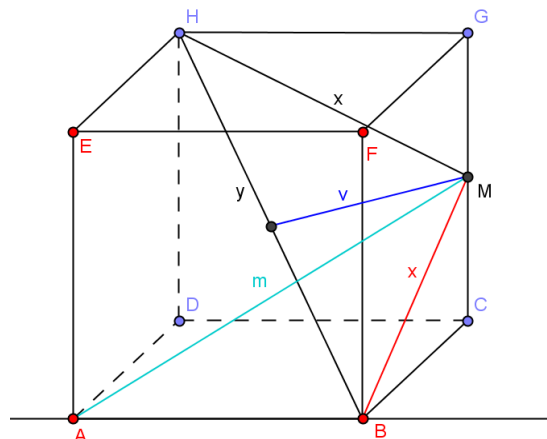
$$x = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

c) v $\triangle BMH$ - rovnoramenný

$$y = \sqrt{3}a \quad v \perp y$$

$$v^2 = x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

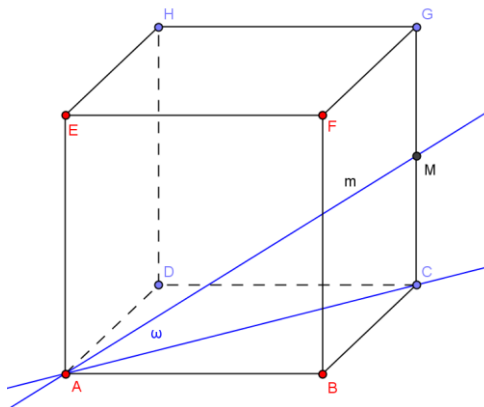
$$\Rightarrow v = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



d) v $\triangle ACM$ úhel ω

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon = 19^\circ 28'$$



e) $\leftrightarrow BG, \leftrightarrow AM$ jsou mimoběžné

$\leftrightarrow BG \parallel \leftrightarrow AH$

v $\triangle AMH$ - obecný, nutné dopočítat rozměry

$$u = \sqrt{2}a$$

$$h = x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$m = \frac{3}{2}a$$

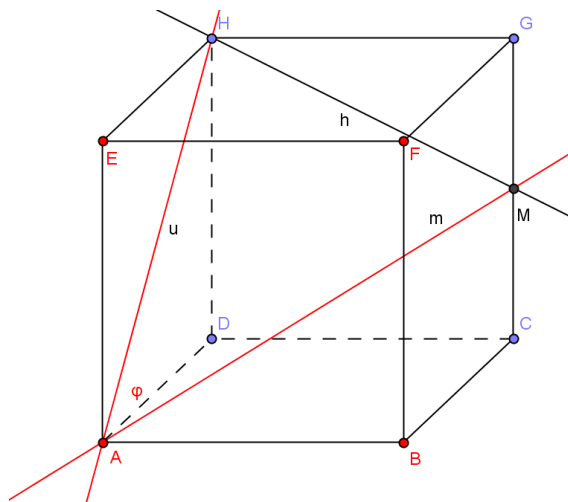
kosinová věta

$$h^2 = u^2 + m^2 - 2um \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{u^2 + m^2 - h^2}{2um}$$

$$\cos \varphi = \frac{2a^2 + \frac{9}{4}a^2 - \frac{5}{4}a^2}{2 \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{3}{2}a} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 45^\circ$$



3) čtyřboký jehlan $ABCDV$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}uv \Rightarrow u = \frac{2 \cdot S_{\Delta}}{v} = \frac{120}{12} = 10 \text{ (cm)}$$

$$u = \sqrt{2}a \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

a) v ΔASV

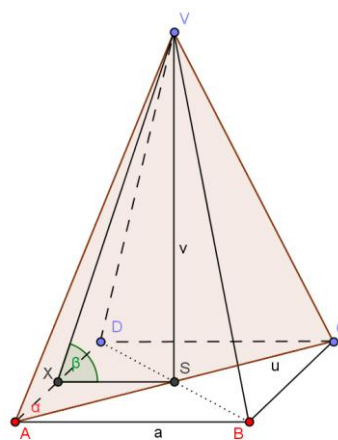
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{\frac{u}{2}} = \frac{12}{5}$$

$$\alpha = 67^{\circ}23'$$

b) v ΔXSV

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{12}{5\sqrt{2}}$$

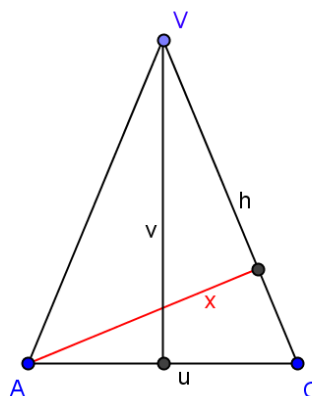
$$\beta = 73^{\circ}35'$$



c) v ΔACV platí

$$S = \frac{1}{2}uv = \frac{1}{2}hx$$

$$x = \frac{uv}{h} = \frac{10 \cdot 12}{13} = 9,23 \text{ (cm)}$$



4) šestiboký jehlan $ABCDV$: $v=10$ $r=a=6$

$$\begin{aligned} \text{a) v } \triangle ASV \quad \quad \quad \operatorname{tg} \alpha &= \frac{v}{a} = \frac{10}{6} \\ \alpha &= 59^{\circ}2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) v } \triangle XSV \quad (X = S_{AB}) \quad \quad \quad v_a &= \frac{a}{2} \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{v}{v_a} = \frac{10}{3\sqrt{3}} \\ \beta &= 62^{\circ}33' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) v } \triangle XYV \text{ - rovnoramenný} \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \frac{v_a}{v} = \frac{3\sqrt{3}}{10} \\ \gamma &= 54^{\circ}55' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } |AC| &= 2v_a = 2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \\ |AV| &= h = \sqrt{v^2 + a^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} \end{aligned}$$

e) v $\triangle ADV$ platí

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} 2rv = \frac{1}{2} h_x \\ x &= \frac{2rv}{h} = \frac{12 \cdot 10}{2\sqrt{34}} = 10,3 \end{aligned}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

- Použité nákresy jsou vlastní - sestrojené v programu GeoGebra.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*, upravené vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-164-7.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.

