



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-2-8
Anotace	Pracovní list - metrické úlohy v prostoru, řešené analytickou metodou - příklady, včetně řešení. Povolené pomůcky: kalkulačka. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 7.E, 25.1.2013, Matematika

ZADÁNÍ

Příklad 1.

V prostoru jsou dány body, které tvoří vrcholy čtyřstěnu ABCD:
 $A[0,1,3]$, $B[1,0,2]$, $C[-2,-1,5]$, $D[0,-2,-6]$. Určete

- a) odchylku přímky AD a roviny podstavy ABC,
- b) odchylku rovin ABC a ABD,
- c) obsah trojúhelníku ABC,
- d) výšku z vrcholu D k rovině podstavy ABC.

Příklad 2.

Je dán čtyřstěn KLMN: $K[1;2;-1]$, $L[3;-1;1]$, $M[1;1;3]$, $N[-1;2;0]$.

- Vypočítejte:
- a) vzdálenost bodu N od roviny KLM,
 - b) obsah stěny KLM,
 - c) odchylku roviny $\leftrightarrow KLM$ a přímky $\leftrightarrow LN$.

Příklad 3.

Je dána krychle A-H a body K, L, M, K je střed AB, L je střed AD, M je střed GH. Umístěte do soustavy souřadnic a napište analytické vyjádření roviny $\rho \leftrightarrow KLM$, jestliže $|AB| = a = 4\text{cm}$. Vypočítejte:

- a) odchylku roviny ρ od podstavy ABC,
- b) vzdálenost bodu G od roviny ρ .



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

Příklad 1.

a) odchylka přímky AD a roviny podstavy ABC

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{AC}(-2,-2,2)$$

$$\begin{matrix} -2 & 2 & -2 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{w_{ABC}}(4,0,4) \sim \overrightarrow{w_{ABC}}(1,0,1)$$

$$\overrightarrow{AD}(0,-3,-9)$$

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{w_{ABC}}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{w_{ABC}}|} = \frac{9}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\alpha = 42^{\circ}8'$$

odchylka přímky AD a roviny podstavy ABC je $42^{\circ}8'$.

b) odchylka rovin ABC a ABD

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{AD}(0,-3,-9)$$

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -3 & -9 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{w_{ABD}}(6,9,-3) \sim \overrightarrow{w_{ABD}}(2,3,-1)$$

$$\overrightarrow{w_{ABC}}(4,0,4) \sim \overrightarrow{w_{ABC}}(1,0,1)$$

$$\cos \beta = \frac{\left| \overrightarrow{w_{ABC}} \cdot \overrightarrow{w_{ABD}} \right|}{\left| \overrightarrow{w_{ABC}} \right| \cdot \left| \overrightarrow{w_{ABD}} \right|} = \frac{2-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\beta = 79^{\circ}6'$$

odchylka rovin ABC a ABD je $79^{\circ}6'$.

c) obsah trojúhelníku ABC

$$\overrightarrow{w_{ABC}}(4,0,4)$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{w_{ABC}} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{16+16} = 2 \cdot \sqrt{2} j^2$$

obsah trojúhelníku ABC je $2 \cdot \sqrt{2} j^2$.

d) výška z vrcholu D k rovině podstavy ABC

$$\overrightarrow{w_{ABC}}(4,0,4) \sim \overrightarrow{w_{ABC}}(1,0,1)$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$\text{rovina } ABC: x + z + d = 0$$

$$3 + d = 0$$

$$x + z - 3 = 0$$

$$|D, ABC| = \frac{|-6-3|}{\sqrt{2}} = 6,36 j$$

výška z vrcholu D k rovině podstavy ABC je 6,36 j .

Příklad 2.

a) vzdálenost bodu N od roviny KLM

$$\overrightarrow{KL}(2, -3, 2)$$

$$\overrightarrow{KM}(0, -1, 4)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_{KLM}}(-10, -8, -2) \sim \overrightarrow{w_{KLM}}(5, 4, 1)$$

$$\text{rovina KLM: } 5x + 4y + z + d = 0$$

$$5 + 8 - 1 + d = 0$$

$$5x + 4y + z - 12 = 0$$

$$|N, KLM| = \frac{|-5 + 8 + 0 - 12|}{\sqrt{25 + 16 + 1}} = 1,388 j$$

vzdálenost bodu N od roviny KLM je 1,388 j .

b) obsah stěny KLM

$$\overrightarrow{w_{KLM}}(-10, -8, -2)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{w_{KLM}}| = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 64 + 4} = \sqrt{42} j^2$$

obsah stěny KLM je $\sqrt{42} j^2$.

c) odchylka roviny $\leftrightarrow KLM$ a přímky $\leftrightarrow LN$

$$\overrightarrow{w_{KLM}}(-10, -8, -2)$$

$$\overrightarrow{LN}(-4, 3, -1)$$

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{LN} \cdot \overrightarrow{w_{KLM}}|}{|\overrightarrow{LN}| \cdot |\overrightarrow{w_{KLM}}|} = \frac{40 - 24 + 2}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{168}}$$

$$\alpha = 15^\circ 48'$$

odchylka roviny $\leftrightarrow KLM$ a přímky $\leftrightarrow LN$ je $15^\circ 48'$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Příklad 3.

a) odchylka roviny $\rho \leftrightarrow KLM$ od podstavy ABD

$$A[0,4,0], B[4,4,0], C[4,0,0], D[0,0,0], E[0,4,4], F[4,4,4], G[4,0,4], \\ H[0,0,4], K[2,4,0], L[0,2,0], M[2,0,4]$$

$$\overrightarrow{KL}(-2,-2,0)$$

$$\overrightarrow{KM}(0,-4,4)$$

$$\begin{matrix} -2 & 0 & -2 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -4 & 4 & 0 & -4 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{w_{KLM}}(-8,8,8) \sim \overrightarrow{w_{KLM}}(-1,1,1)$$

$$\text{rovina KLM: } -x + y + z + d = 0$$

$$-2 + 4 + 0 + d = 0$$

$$-x + y + z - 2 = 0$$

$$\overrightarrow{AB}(4,0,0)$$

$$\overrightarrow{AD}(0,-4,0)$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 4 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -4 & 0 & 0 & -4 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{w_{ABD}}(0,0,-16) \sim \overrightarrow{w_{ABD}}(0,0,-1)$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

rovina ABD: $-z + d = 0$

$$d = 0$$

$$z = 0$$

$$\cos \beta = \frac{\left| \overrightarrow{w_{KLM}} \cdot \overrightarrow{w_{ABD}} \right|}{\left| \overrightarrow{w_{KLM}} \right| \cdot \left| \overrightarrow{w_{ABD}} \right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}}$$

$$\beta = 54^{\circ}44'$$

odchylka rovin KLM a ABD je $54^{\circ}44'$.

b) vzdálenost bodu G od roviny ρ

rovina KLM: $-x + y + z - 2 = 0$

$$|G, KLM| = \frac{|-4 + 0 + 4 - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} j$$

vzdálenost bodu G od roviny ρ je $\frac{2}{\sqrt{3}} j$.

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2010. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1963-905.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.