



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	GEOMETRIE
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2- 8-2-9
Anotace	Množiny bodů dané vlastnosti (analyticky) Procvičování učiva
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	3. ročník vyššího gymnázia, 3.A, 15.3.2013, Matematika

Množiny bodů dané vlastnosti

Postup řešení úloh

- Vhodně umístit zadané prvky do soustavy souřadnic Oxy , (pokud tomu tak není v zadání)
- Vyjádřit zadané vztahy rovnicí (vzdálenosti, odchylky)
- Využívat poznatky z analytické geometrie i planimetrie
- Vyřešit rovnici a najít hledanou množinu
- Zakreslit vše do soustavy souřadnic Oxy

Příklady:

Urči množiny bodů (jsou to body $X[x; y]$), které splňují dané podmínky a zakresli je do soustavy souřadnic Oxy

Pracujte samostatně ve dvojicích

Společně zkontrolujeme výsledky

Samostatná práce

- 1) Jsou dány body $A[1;1]$, $B[5;1]$. Najděte množinu těžišť T všech $\triangle ABC$, jestliže vrchol $C \in p: y = 4$.
- 2) Jsou dány rovnoběžné přímky $a \parallel b$, $a: x = 2$, $b: x = 5$. Najděte množinu všech bodů $X[x; y]$ v rovině, které mají od přímky a dvojnásobnou vzdálenost než od přímky b .
- 3) V rovině je dán bod $M[-2;0]$ a přímka $p: x - 4 = 0$. Určete množinu všech bodů $X[x, y]$ v rovině, pro které platí $2 \cdot |XM| = |Xp|$.
- 4) V rovině je dána přímka $p = x$ a bod $A[0;2]$. Určete množinu všech bodů $X[x, y]$ v rovině, které mají součet vzdáleností od bodu A a od přímky p roven 6.
- 5) Ukažte, že množinou všech bodů $X[x, y]$ roviny, které mají od bodu $Q[0;-6]$ třikrát větší vzdálenost než od bodu $P = [2;0]$ je kružnice. Určete její střed a poloměr.
- 6) Je dána kružnice a jedna její tečna. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice i tečny.

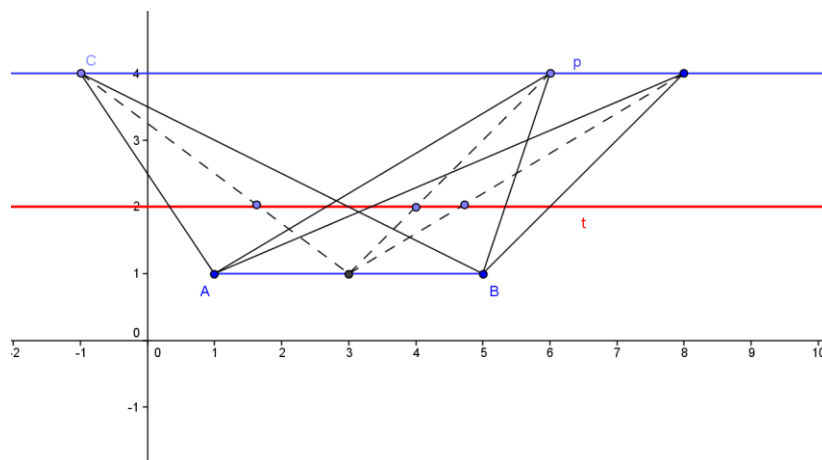
Řešení

1) Pro těžiště T v $\triangle ABC$ platí $T = \frac{A+B+C}{3}$

Tedy pro souřadnice

$$x_T = \frac{1+5+x}{3} = 2 + \frac{x}{3}, \quad x \in \mathbb{R} \wedge y_T = \frac{1+1+4}{3} = 2$$

Takže těžiště T leží na přímce $t: y = 2$



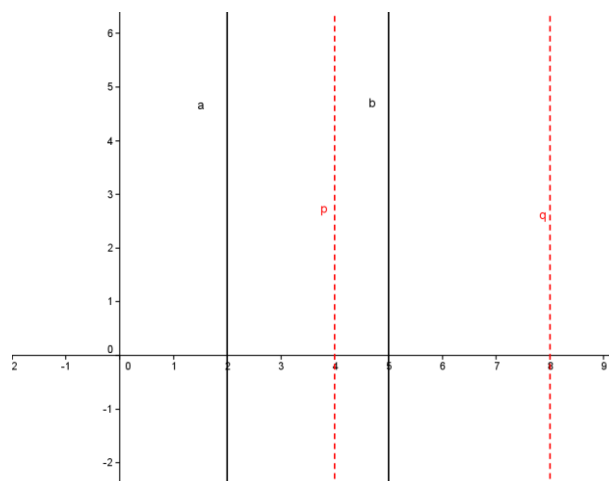
2) Pro vzdálenosti platí: $|Xa| = 2 \cdot |Xb|$

$$|x-2| = 2|x-5|$$

všechna řešení budou pro $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{V } x \leq 5 \quad \text{platí } x-2 &= 2(5-x) \\ \Rightarrow 3x &= 12 \Rightarrow p: x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V } x \geq 5 \quad \text{platí } x-2 &= 2(x-5) \\ \Rightarrow x &= 8 \Rightarrow q: x = 8 \end{aligned}$$



3)

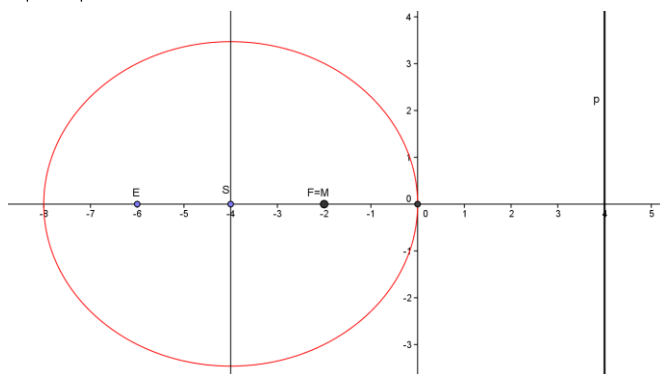
Pro vzdálenosti platí $2 \cdot |XM| = |Xp|$

$$2 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{|x-4|}{1} \quad /^2$$

$$4 \cdot (x+2)^2 + 4y^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$3 \cdot (x+4)^2 + 4y^2 = 48$$

$$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$



Body $X[x, y]$ leží na elipse se středem $S[-4;0]$,
bod $M[-2;0]$ je jedním ohniskem elipsy.

4)

Pro vzdálenosti platí $|XA| + |Xp| = 6$

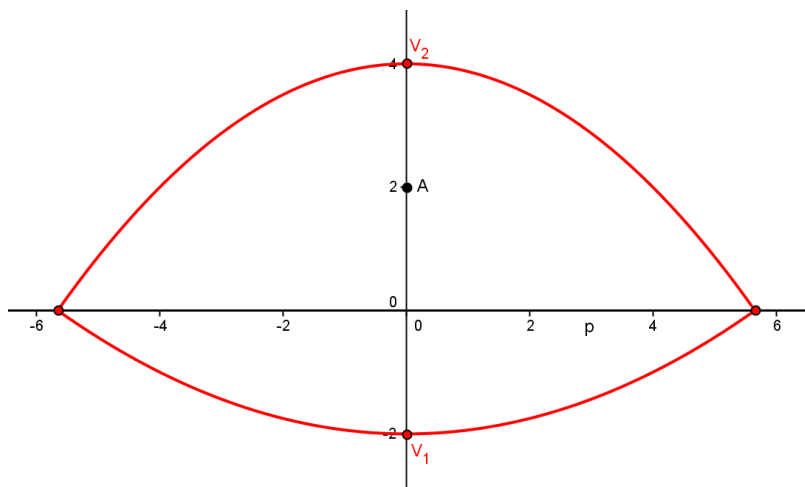
$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6 - |y| \quad /^2$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 36 - 12|y| + y^2$$

$$x^2 = 32 + 4y - 12|y| \quad \dots \text{to jsou části dvou parabol}$$

pro $y \leq 0$ platí $x^2 = 16(y+2)$ $V_1[0;-2]$ pro $y \geq 0$ platí $x^2 = -8(y-4)$ $V_2[0;4]$

Obě paraboly mají ohnisko v daném bodě $A[0;2]$ a jejich společné body leží na dané přímce p .



5) Pro vzdálenosti platí: $|XP| \cdot 3 = |XQ|$

$$3\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+6)^2} \quad /^2$$

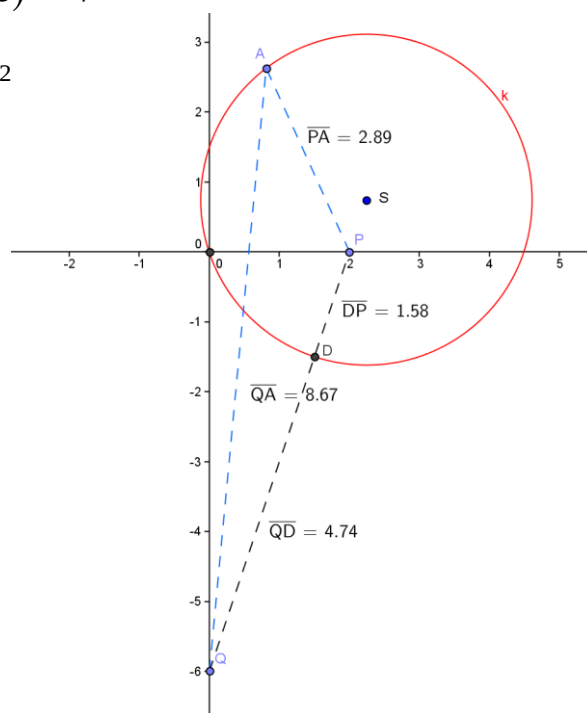
$$9 \cdot (x-2)^2 + 9y^2 = x^2 + (y+6)^2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + y^2 - \frac{3}{2}y = 0$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{16}$$

Je to kružnice se středem $S\left[\frac{9}{4}; \frac{3}{4}\right]$

a poloměrem $r = \frac{3\sqrt{10}}{4}$



6)

Nejdříve umístíme dané prvky:

Např. kružnice $k(S[0;0], r=4)$, její tečna $t: x=4$ Pro vzdálenosti platí $|XS| - r = |Xt|$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 4 = |x - 4|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |x - 4| + 4 \quad /^2$$

Po úpravě:

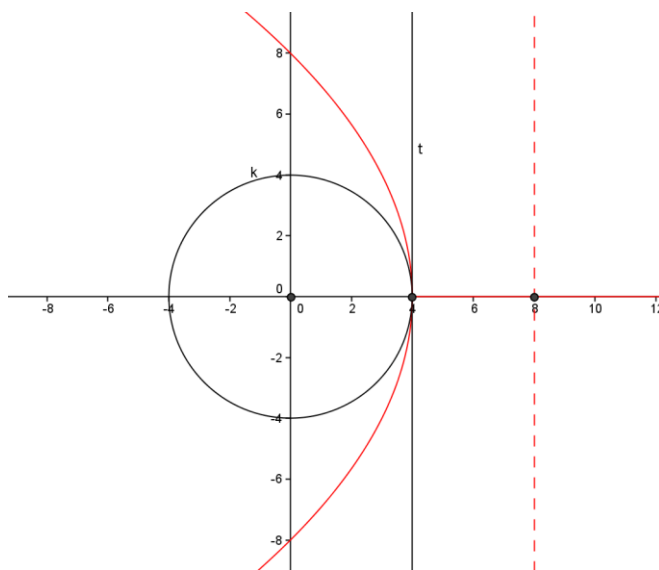
$$y^2 = 32 - 8x + 8|x - 4|$$

pro $x \leq 4$ platí

$$y^2 = -16(x - 4)$$

parabola s $V_1[4;0]$ pro $x \geq 4$ platí

$$y^2 = 0$$

polopřímka $y = 0$ *Pokuste se výsledek zobecnit.*evropský
sociální
fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVYOP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

- Použité grafy jsou vlastní sestrojené v programu GeoGebra.
- KOŘANDRLE, Milan, Leo Boček. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*. 2., upravené vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-163-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.