



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2- 8-3-12
Anotace	Písemná práce (dvě varianty) - posloupnosti a vlastnosti posloupností, včetně řešení. Povolené pomůcky: kalkulačka. Předpokládaný čas vypracování 20 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 14.9.2012, Matematika

ZADÁNÍ

SKUPINA A

1. Vyjádřete dané posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen:

a) $\{1, 8, 27, 64, 125, \dots\}$

b) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$

2. Vypište prvních pět členů posloupnosti, zobrazte v rovině (náčrt s popisky), rozhodněte o monotónnosti a omezenosti a svá

tvrzení dokažte. (zápis!) $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

3. Posloupnosti jsou zadány rekurentně nebo vzorcem pro n-tý člen, vyjádřete opačný zápis.

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot a_n$

b) $(2^{n-1})_{n=1}^{\infty}$

4. Vypište prvních pět členů posloupnosti, rozhodněte o

monotónnosti a omezenosti, zapište rekurentně. $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ

SKUPINA B

1. Vyjádřete dané posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen:

a) $\{1, -2, 4, -8, 16, -32, 64\}$

b) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$

2. Vypište prvních pět členů posloupnosti, zobrazte v rovině (náčrt s popisky), rozhodněte o monotónnosti a omezenosti a svá

tvrzení dokažte. (zápis!). $\left(\frac{n^2}{2} - 6\right)_{n=1}^{\infty}$

3. Posloupnosti jsou zadány rekurentně nebo vzorcem pro n-tý člen, vyjádřete opačný zápis.

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n$

b) $(n \cdot (n+1))_{n=1}^{\infty}$

4. Vypište prvních pět členů posloupnosti, rozhodněte o

monotónnosti a omezenosti, zapište rekurentně. $\left(\frac{6n-8}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

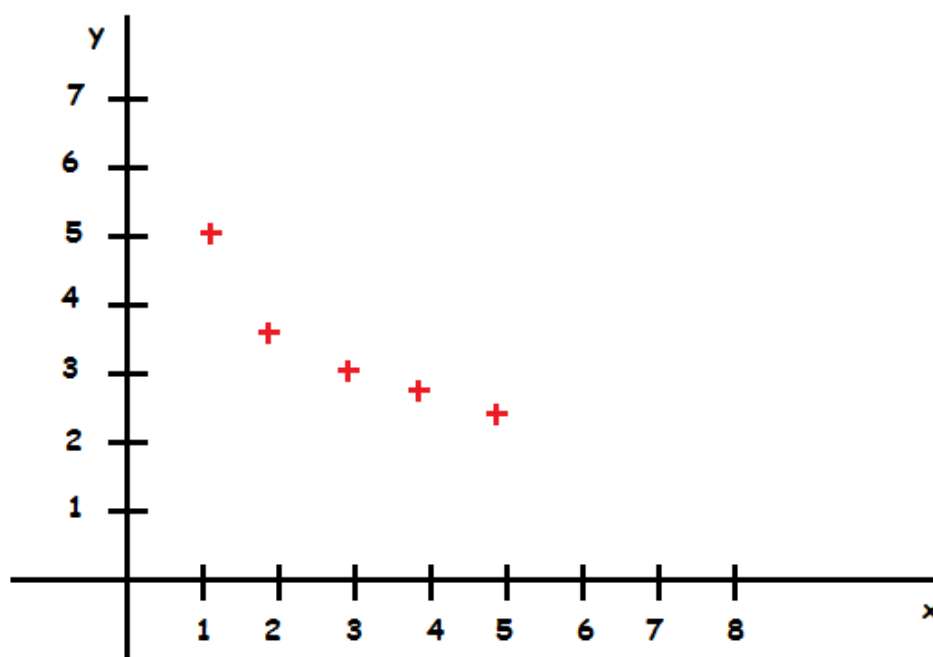
SKUPINA A

1.

a) $(n^3)_{n=1}^{\infty}$

b) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^5$

2. $\left\{5, \frac{7}{2}, 3, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \dots\right\}$, klesající, omezená



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > a_{n+1}$$

$$\frac{2n+3}{n} > \frac{2n+5}{n+1}$$

$$(n+1)(2n+3) > n(2n+5)$$

$$2n^2 + 5n + 3 > 2n^2 + 5n$$

$$3 > 0n$$



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq a_n \leq 5$$

$$2 \leq \frac{2n+3}{n} \leq 5$$

$$2n \leq 2n+3 \wedge 2n+3 \leq 5n$$

$$0n \leq 3 \wedge 1 \leq n$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Protože poslední nerovnost je pravdivá a operace byly ekvivalentní, platí také první nerovnost, omezenost a monotonie je tak dokázána.

3. a) $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\right\}$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

b) $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

4. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots\right\}$

$$a_{n+1} : a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$$

klesající, omezená



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

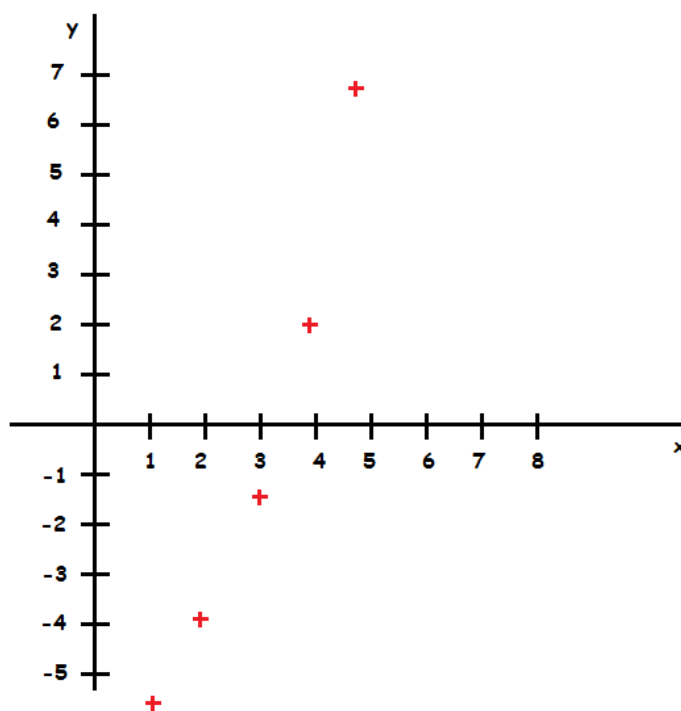
SKUPINA B

1.

a) $\left(1 \cdot (-2)^{n-1}\right)_{n=1}^7$

b) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

2. $\left\{-\frac{11}{2}, -4, -\frac{3}{2}, 2, \frac{13}{2}, \dots\right\}$, rostoucí, omezená zdola



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$$

$$\frac{n^2}{2} - 6 < \frac{(n+1)^2}{2} - 6$$

$$n^2 < (n+1)^2$$

$$0 < 2n+1$$



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{11}{2} \leq a_n$$

$$-\frac{11}{2} \leq \frac{n^2}{2} - 6$$

$$-11 \leq n^2 - 12$$

$$1 \leq n^2$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Protože poslední nerovnost je pravdivá a operace byly ekvivalentní, platí také první nerovnost, omezenost a monotonie je tak dokázána.

3. a) $\{1, 3, 9, 27, 81, \dots\}$

$$(3^{n-1})_{n=1}^{\infty}$$

b) $\{2, 6, 12, 20, \dots\}$

$$a_{n+1} : a_n = (n+1)(n+2) : n(n+1) = \frac{n+2}{n}$$

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n$$

4. $\{-1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$

$$a_1 = -1, a_{n+1} = a_n + 3$$

rostoucí, zdola omezená



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: posloupnosti a řady*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4991-7.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost