



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-3-13
Anotace	Pracovní list - limita funkce - početní příklady, včetně řešení. Povolené pomůcky: rýsovací potřeby, kalkulačka. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 28.11.2012, Matematika

ZADÁNÍ**Příklad 1.**

Vypočítejte limity zadaných funkcí (postup, zápis):

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2 \cdot \sin x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \operatorname{tg} x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - x^2}$$

ŘEŠENÍ**Příklad 1.**

$$a) 1 - 3 = -2$$

$$b) 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$c) 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 1+1 = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+6)(x-1)}{-x(x-1)} = \frac{1+6}{-1} = -7$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ**Příklad 2.**

Vypočítejte limity zadaných funkcí (postup, zápis):

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x^3 + 1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - x}{2x^3 + x^2 - 2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 2x}{3x + 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$$

ŘEŠENÍ**Příklad 2.**

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \cdot \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right) = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3} \right) = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \cdot \left(3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \cdot \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 \right)}{x \cdot \left(3 + \frac{1}{x} \right)} = -\frac{2}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

ZADÁNÍ**Příklad 3.**

Vypočítejte limity zadaných funkcí (postup, zápis):

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{3x - 9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

ŘEŠENÍ**Příklad 3.**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)(x+3)}{3(x-3)} = 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \cdot \frac{2 + \sqrt{x-3}}{2 + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - (x-3)}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ**Příklad 4.**

Vypočítejte limity zadaných funkcí (postup, zápis):

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$$

ŘEŠENÍ**Příklad 4.**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot (x-1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} = \frac{1}{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (1 + \sqrt{1 - x})} = \frac{1}{2}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ**Příklad 5.**

Vypočítejte limity zadaných funkcí (postup, zápis):

$$a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{2 - x^2 - x^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{x \cdot \sin x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

ŘEŠENÍ**Příklad 5.**

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$$

$$b) \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} - 1\right)} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = -\frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{5 \cdot 3x} = \frac{3}{5}$$

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost