



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-3-14
Anotace	Pracovní list - derivace funkce - početní příklady - součet, rozdíl, součin, podíl, složená funkce, včetně řešení. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 17.12.2012, Matematika

POUŽITÉ VZORCE

Derivace elementárních funkcí

1) $y = c$	$y' = 0$
2) $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
3) $y = e^x$	$y' = e^x$
4) $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
5) $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
6) $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \log a}$
7) $y = \sin x$	$y' = \cos x$
8) $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
9) $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10) $y = \operatorname{cot} gx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Vzorce pro derivování funkcí

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ZADÁNÍ

Vypočítejte derivace zadaných funkcí (postup, zápis):

Příklad 1.

a) $y = x^2 - 3$

b) $y = 4 \cdot \sin x$

c) $y = 5x^2 - 1$

d) $y = 7x^4 - 3x^2$

e) $y = 4x^5 - 3 \cdot \cos x$

f) $y = \sqrt{x}$

Řešení

$$y' = 2x$$

$$y' = 4 \cdot \cos x$$

$$y' = 10x$$

$$y' = 28x^3 - 6x$$

$$y' = 20x^4 + 3 \cdot \sin x$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$$

Příklad 2.

a) $y = x^3 + \frac{1}{x^3}$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}$

c) $y = 3x^5 - 5x^3 + 15$

Řešení

$$y' = 3x^2 - 3x^{-4}, x \neq 0$$

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}, x > 0$$

$$y' = 15x^4 - 15x^2$$

d) $y = \sin x \cdot (2x - 5)$

$$y' = \cos x \cdot (2x - 5) + 2 \sin x$$

e) $y = 2x + \frac{1}{x^2}$

$$y' = 2 - 2x^{-3}, x \neq 0$$

f) $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x - \cos x$

$$y' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \sin x, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Příklad 3.

a) $y = \frac{4x}{x-1}$

Řešení

$$y' = \frac{4(x-1) - 4x}{(x-1)^2} = -\frac{4}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

b) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

Řešení

$$y' = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}, x \neq -2$$

c) $y = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$

Řešení

$$y' = \frac{6x(x^2 + 1) - 3x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$$

d) $y = \frac{2x^2 - 1}{x + 2}$

Řešení

$$y' = \frac{4x(x + 2) - (2x^2 - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 1}{(x + 2)^2}, x \neq -2$$

e) $y = \frac{2 \cdot \sin x}{1 + \cos x}$

Řešení

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2 \cdot \cos x(1 + \cos x) - 2 \cdot \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2 \cdot \cos x + 2}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{2}{1 + \cos x}, x \neq \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

f) $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$

Řešení

$$y' = \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^4 - 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2}{x^3}, x \neq 0$$

Příklad 4.

a) $y = (2x^2 - 3x)^3$

Řešení

$$y' = 3 \cdot (2x^2 - 3x)^2 \cdot (4x - 3)$$

b) $y = \sqrt{3x^2 + 1}$

Řešení

$$y' = \frac{6x}{2 \cdot \sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$$

c) $y = \sqrt{x + 5}$

Řešení

$$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x + 5}}, x > -5$$

d) $y = \frac{2x^2 + 5}{\sqrt{x - 1}}$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Řešení

$$y' = \frac{4x \cdot \sqrt{x-1} - \frac{2x^2+5}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{8x \cdot (x-1) - (2x^2+5)}{2\sqrt{x-1} \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{6x^2 - 8x - 5}{2\sqrt{x-1} \cdot (x-1)}, x > 1$$

e) $y = 3 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Řešení

$$y' = -6 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

f) $y = e^{3x}$

Řešení

$$y' = 3 \cdot e^{3x}$$

Příklad 5.

a) $y = \ln(2x^3 - 1)$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení

$$y' = \frac{6x^2}{2x^3 - 1}, x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

b) $y = \ln(x + 4)$

Řešení

$$y' = \frac{1}{x + 4}, x > -4$$

c) $y = (x^3 + x^2 - 5)^5$

Řešení

$$y' = 5(x^3 + x^2 - 5)^4 \cdot (3x^2 + 2x)$$

d) $y = \sqrt{2x^2 - x + 5}$

Řešení

$$y' = \frac{4x - 1}{2 \cdot \sqrt{2x^2 - x + 5}}$$

e) $y = \ln(\sin x + 2)$

Řešení

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

f) $y = 5^{3x^2+2x-1}$

Řešení

$$y' = (6x + 2) \cdot 5^{3x^2+2x-1} \cdot \ln 5$$

g) $y = \cos^3(3x^2 + 2x + 1)$

Řešení

$$y' = -3 \cdot (6x + 2) \cdot \cos^2(3x^2 + 2x + 1) \cdot \sin(3x^2 + 2x + 1)$$

h) $y = (e^{5x} + 1)^2$

Řešení

$$y' = 2 \cdot 5 \cdot (e^{5x} + 1) \cdot e^{5x} = 10 \cdot (e^{5x} + 1) \cdot e^{5x}$$

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost