



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-3-15
Anotace	Pracovní list - derivace funkce a její využití - početní příklady, včetně řešení. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 19.12.2012, Matematika

UŽITÍ DIFERENCIONÁLNÍHO POČTU

1. Geometrický význam

určení tečny a normály grafu dané funkce

$$t: (y-y_0) = k.(x-x_0)$$

$$k=f'(x_0)$$

$$n: (y-y_0) = -1/k.(x-x_0)$$

$$T[y_0, x_0]$$

2. Určení intervalu monotónnosti dané funkce

určení „znaménka“ první derivace

3. Určení extrémů dané funkce

určení „znaménka“ první a druhé derivace

a) výpočet souřadnic vrcholu paraboly

b) výpočet obvodů a obsahů rovinných útvarů

c) výpočet povrchů a objemů těles

4. Výpočet limit typu „0/0“ - L'Hospitalovo

pravidlo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

5. Fyzikální význam

okamžitá rychlost pohybu hmotného bodu: $v=f'(t_0)$

okamžité zrychlení $a=f''(t_0)$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ

Příklad 1.

Vypočítejte rovnici tečny a normály grafu funkce $f : y = x^3 - 4$ v jejím bodě $T[1, -3]$.

ŘEŠENÍ

$$t : y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

$$t : y + 3 = k \cdot (x - 1)$$

$$k = f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 = 3$$

$$t : y + 3 = 3 \cdot (x - 1)$$

$$\underline{t : 3x - y - 6 = 0}$$

$$n : y - y_0 = -\frac{1}{k} \cdot (x - x_0)$$

$$n : y + 3 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 1)$$

$$\underline{n : x + 3y + 8 = 0}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ

Příklad 2.

Vypočítejte rovnici tečny grafu funkce $g: y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ v jejím

bodě $T\left[1, -\frac{1}{5}\right]$.

ŘEŠENÍ

$$t: y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

$$t: y + \frac{1}{5} = k \cdot (x - 1)$$

$$k = f'(x_0) = \frac{2x_0^2 + 8x_0 - 8}{(x_0 + 4)^2} = \frac{2}{25}$$

$$t: y + \frac{1}{5} = \frac{2}{25} \cdot (x - 1)$$

$$t: y = \frac{2}{25}x - \frac{7}{25}$$

ZADÁNÍ

Příklad 3.

Určete intervaly monotónnosti daných funkcí:

a) $f : y = 2x + 5$

b) $g : y = \frac{3}{x} - 1$

c) $h : y = \frac{1}{40} (3x^4 - 4x^3 - 36x^2)$

d) $k : y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

ŘEŠENÍ

a) $f : y = 2x + 5$

$y' = 2 > 0$ funkce je rostoucí na celém definičním oboru

b) $g : y = \frac{3}{x} - 1$

$y' = -\frac{3}{x^2} < 0$ funkce je klesající na celém definičním oboru

c) $h : y = \frac{1}{40} (3x^4 - 4x^3 - 36x^2)$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$y' = \frac{3x}{10}(x-3)(x+2)$$

$(-\infty, -2>$	$<-2,0>$	$<0,3>$	$<3,\infty)$
-	+	-	+
klesající	rostoucí	klesající	rostoucí

d) $k: y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$y' = -\frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$(-\infty, -1>$	$<-1,1>$	$<1,\infty)$
-	+	-
klesající	rostoucí	klesající

ZADÁNÍ

Příklad 4.

Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy daných funkcí:

a) $f: y = \frac{1}{40}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2)$

b) $g: y = x^3 - 3x^2$

c) $h: y = x^5 - 10x^3 + 40x$

d) $k: y = x^3 + x^2 + x + 1$

e) $l: y = -x^2 + 2x + 3$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

$$a) f : y = \frac{1}{40} (3x^4 - 4x^3 - 36x^2)$$

$$y' = \frac{3x}{10} (x-3)(x+2)$$

$(-\infty, -2>$	$<-2,0>$	$<0,3>$	$<3,\infty)$
-	+	-	+
klesající	rostoucí	klesající	rostoucí

body podezřelé z extrému -2, 0, 3

$$y'' = \frac{3}{10} (3x^2 - 2x - 6)$$

$$f'(-2) = 0 \wedge f''(-2) > 0 \text{ ostré lokální minimum}$$

$$f'(0) = 0 \wedge f''(0) < 0 \text{ ostré lokální maximum}$$

$$f'(3) = 0 \wedge f''(3) > 0 \text{ ostré lokální minimum}$$

$$b) g : y = x^3 - 3x^2$$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$y'' = 6(x-1)$$

$(-\infty, 0>$	$<0,2>$	$<2,\infty)$
+	-	+
rostoucí	klesající	rostoucí

body podezřelé z extrému 0, 2

$$f'(0) = 0 \wedge f''(0) < 0 \text{ ostré lokální maximum}$$

$$f'(2) = 0 \wedge f''(2) > 0 \text{ ostré lokální minimum}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

c) $h: y = x^5 - 10x^3 + 40x$

$$y' = 5(x+2)(x-2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$(-\infty, -2>$	$<-2, -\sqrt{2}>$	$<-\sqrt{2}, \sqrt{2}>$	$<\sqrt{2}, 2>$	$<2, \infty)$
+	-	+	-	+
rostoucí	klesající	rostoucí	klesající	rostoucí

body podezřelé z extrému $-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$

$$y'' = 20x(x^2 - 3)$$

$$f'(-2) = 0 \wedge f''(-2) < 0 \text{ ostré lokální maximum}$$

$$f'(-\sqrt{2}) = 0 \wedge f''(-\sqrt{2}) > 0 \text{ ostré lokální minimum}$$

$$f'(\sqrt{2}) = 0 \wedge f''(\sqrt{2}) < 0 \text{ ostré lokální maximum}$$

$$f'(2) = 0 \wedge f''(2) > 0 \text{ ostré lokální minimum}$$

d) $k: y = x^3 + x^2 + x + 1$

$$y' = 3x^2 + 2x + 1 > 0$$

funkce je rostoucí na celém definičním oboru
nejsou body podezřelé z lokálních extrémů

e) $l: y = -x^2 + 2x + 3$

$$y' = -2x + 2$$

bod podezřelý z extrému 1

$$y'' = -2 < 0 \text{ ostré lokální maximum}$$

$(-\infty, 1>$	$<1, \infty)$
+	-
rostoucí	klesající



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ

Příklad 5.

Určete souřadnice vrcholu paraboly grafu funkce

$$f: y = -x^2 + 2x + 3.$$

ŘEŠENÍ

$$f'(x_0) = 0$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$y = 4$$

$$V[1,4]$$

ZADÁNÍ

Příklad 6.

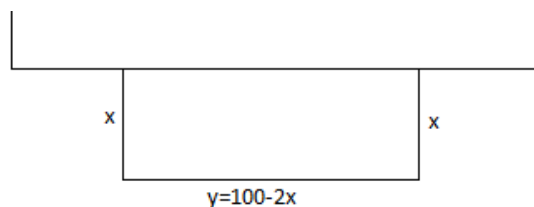
Určete rozměry obdélníkové zahrady s co největším obsahem, máme-li 100m pletiva a jednu stranu zahrady tvoří stěna domu.

ŘEŠENÍ

$$S = a.b$$

$$S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$S' = 100 - 4x$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$S' = 100 - 4x = 0$$

$$x = 25$$

$$y = 50$$

$$S'' = -4 < 0 \text{ ostré lokální maximum}$$

Rozměry obdélníkové zahrady jsou 25m a 50m.

ZADÁNÍ

Příklad 7.

Určete rozměry bazénu se čtvercovým dnem a objemem 32 m^3 a tvar kvádru tak, aby se na nátěr stěn a dna spotřebovalo nejméně barvy.

ŘEŠENÍ

$$V = a^2 \cdot v$$

$$32 = a^2 \cdot v \quad \frac{32}{a^2} = v$$

$$S = a^2 + 4av \quad S = a^2 + 4a \frac{32}{a^2} = a^2 + \frac{128}{a}$$

$$S' = 2a - \frac{128}{a^2} \quad S' = 2a - \frac{128}{a^2} = 0$$

$$2a^3 = 128 \quad a = 4 \quad v = 2$$

$$S'' = 2 + \frac{256}{a^3} \quad S'' = 2 + \frac{256}{4^3} = 6 < 0 \text{ ostré lok. min.}$$

Dno bazénu má rozměry 4m x 4m a hloubka je 2m.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ**Příklad 8.**

Vypočtete limity zadaných funkcí:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$$

ŘEŠENÍ

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2}{5x^4 - 2} = \frac{1}{3}$$

ZADÁNÍ**Příklad 9.**

Určete v (okamžitá rychlost pohybu hmotného bodu) a a (okamžité zrychlení) v čase t volného pádu.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = s'(t) = \frac{1}{2}g2t = gt$$

$$a = s''(t) = (gt)' = g$$

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.