



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-3-16
Anotace	Pracovní list - průběh funkce - příklady, včetně řešení. Povolené pomůcky: rýsovací potřeby, kalkulačka. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 11.1.2013, Matematika

PRŮBĚH FUNKCE

postup při určování průběhu funkce:

1. Df, parita (sudá, lichá), periodicitu funkce
2. Limity funkce v nevlastních bodech
3. Průsečíky funkce s osami souřadnic
4. 1.derivace funkce, stacionární body
1.derivace, body, ve kterých není
1.derivace definovaná, určení intervalů
monotónnosti a extrémů dané funkce
5. 2.derivace funkce, nulové body
2.derivace, body, ve kterých není
2.derivace definovaná, určení inflexních
bodů, konvexnosti a konkávnosti dané
funkce
6. Graf funkce
7. Obor hodnot funkce



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce:

a) $f : y = \frac{x^4}{4} + x^3$

b) $g : y = \frac{1}{40}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2)$

c) $h : y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

d) $k : y = 9 \cdot \frac{x^2 - 3}{x^3}$

e) $d : y = x^3 - 3x^2 - 9x$

f) $t : y = \frac{1}{1 - x^2}$

g) $l : y = \sqrt{x} - x$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

a) $f : y = \frac{x^4}{4} + x^3$

1. $D = \mathbb{R}$, funkce není sudá ani lichá, není periodická, je spojitá na D

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4}{4} + x^3 \right) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{4} + x^3 \right) = \infty$

3. $[0,0]$ a $[-4,0]$

4. $y' = x^3 + 3x^2 = x^2 \cdot (x + 3)$

	-3		0	
-		+		+
				

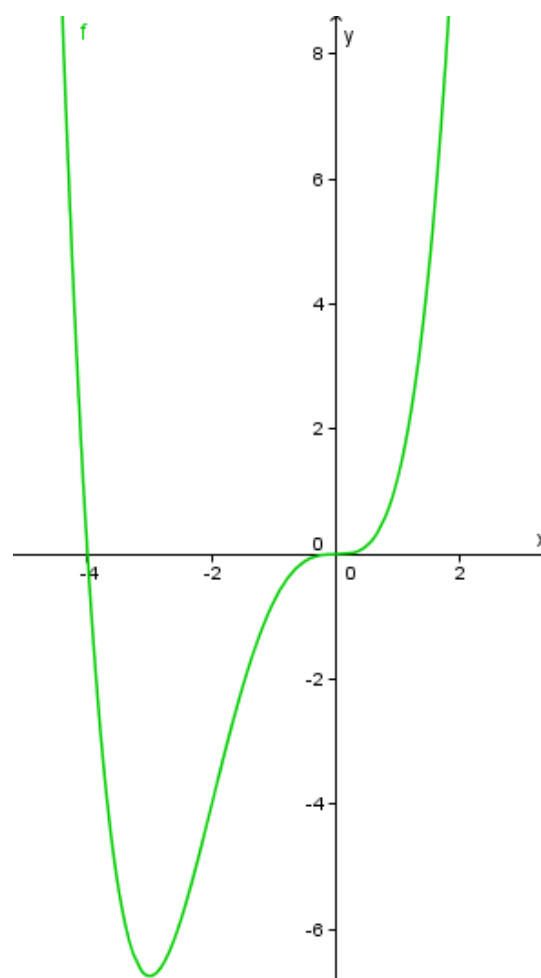
5. $y'' = 3x^2 + 6x = 3x \cdot (x + 2)$

	-3		0	
+		-		+
				

6.

x	-4	0	-3	-2
y	0	0	-6,75	-4

7. $H = \langle -6,75, \infty \rangle$



b) $g: y = \frac{1}{40}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2)$

1. $D = \mathbb{R}$, funkce není sudá ani lichá, není periodická, je spojitá na D

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{40}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2) \right) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{40}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2) \right) = \infty$

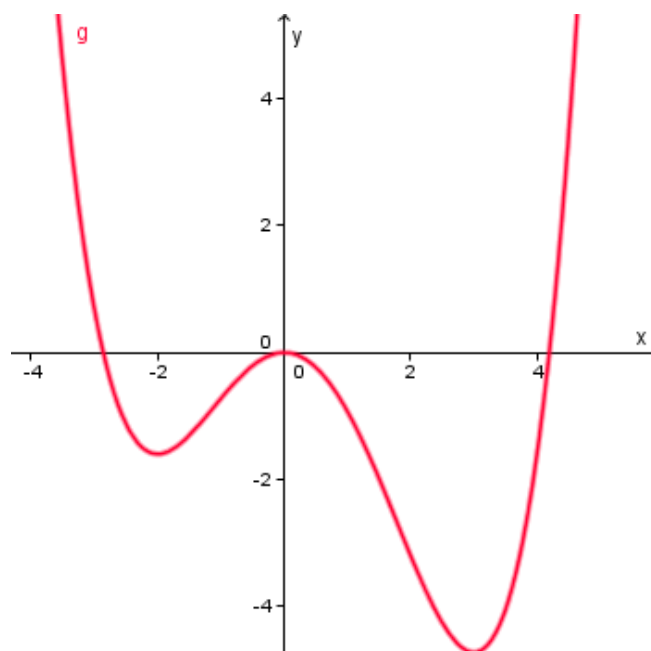
3. $[0,0]$ a $\left[\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{7}, 0 \right]$ a $\left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{7}, 0 \right]$

4. $y' = \frac{3x}{10}(x-3)(x+2)$

	-2		0		3	
-		+		-		+
						

5. $y'' = \frac{3}{10}(3x^2 - 2x - 6)$

	-1		1,8	
+		-		+
				



6.

7. $H = (-4,725, \infty)$

x	-2	-1,1	0	1,8	3
y	-1,6	-0,85	0	-2,7	-4,725

c) $h: y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

1. $D = \mathbb{R}$, funkce je lichá, není periodická, je spojitá na D

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0$

3. $[0, 0]$

4. $y' = \frac{2 \cdot (1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

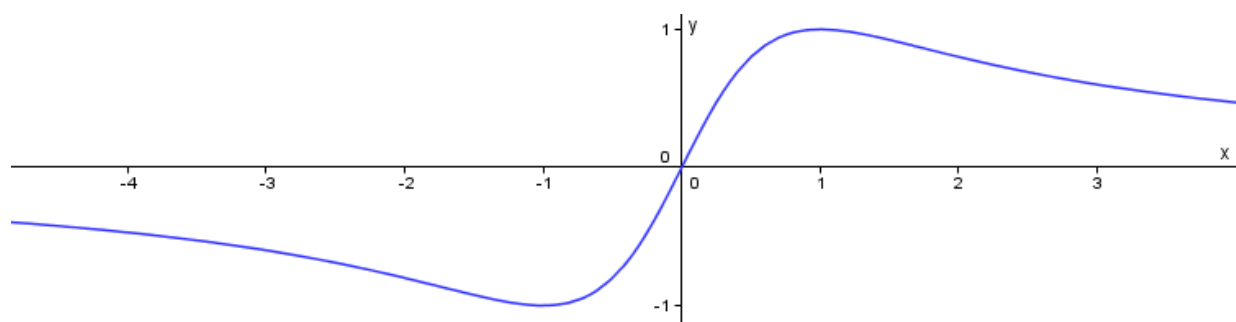
	-1		1	
-		+		-
				

5. -----

6.

x	-1	0	1
y	-1	0	1

7. $H = \langle -1, 1 \rangle$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

d) $k: y = 9 \cdot \frac{x^2 - 3}{x^3}$

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce je lichá, není periodická

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^3} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^3} \right) = 0$

3. $[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, 0]$

4. $y' = 9 \cdot \frac{-x^2 + 9}{x^4}$

	-3		0		3	
-		+		+		-
						

5. $y'' = 18 \cdot \frac{x^2 - 18}{x^5}$

	-4,2		0		4,2	
-		+		-		+
						

6.

x	-4,2	-3	0	3	4,2
y	-1,8	-2	neex.	2	1,8

7. $H = \mathbb{R}$



evropský
sociální
fond v ČR



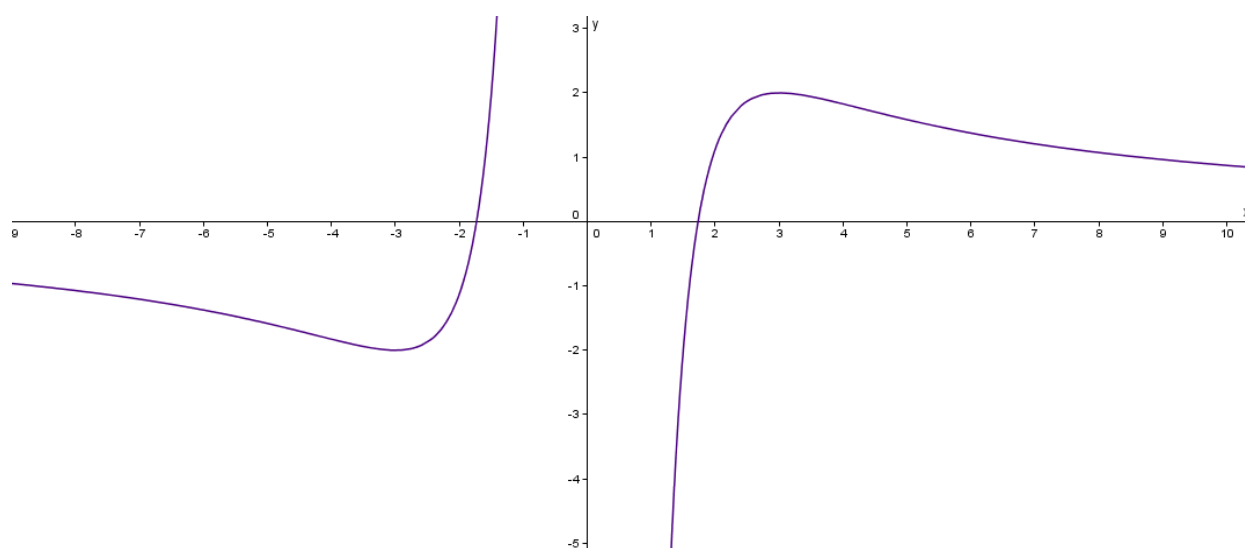
EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



e) $d : y = x^3 - 3x^2 - 9x$

1. $D = \mathbb{R}$, funkce není sudá ani lichá, není periodická, je spojitá na D

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2 - 9x) = \infty$

3. $[0,0]$ a $[-1,85;0]$ a $[4,85;0]$

4.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-3)$$

	-1		3	
+		-		+
				

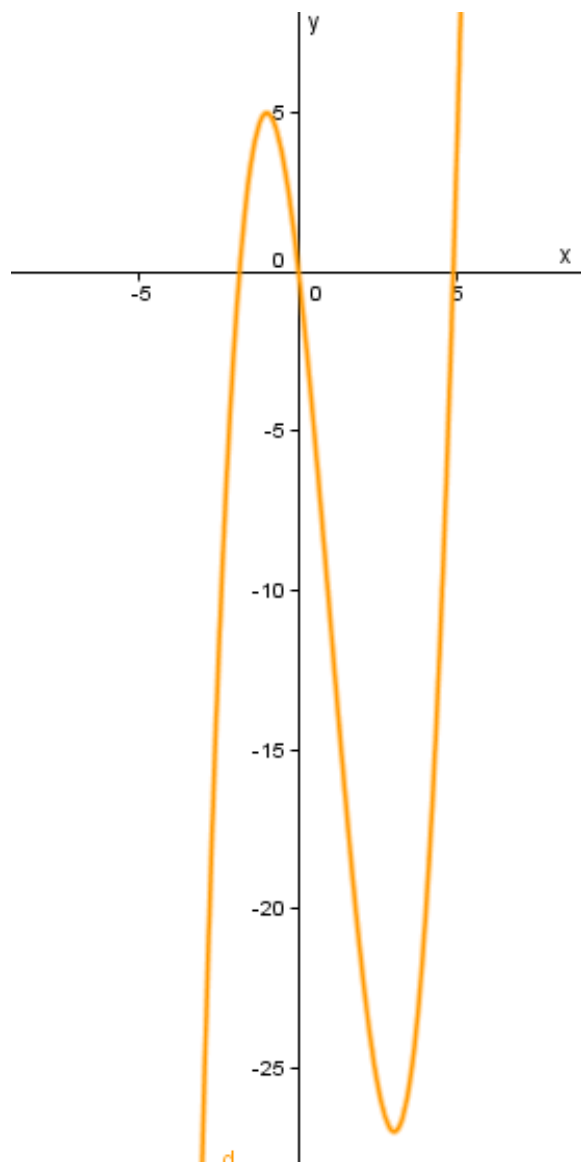
5. $y'' = 6x - 6$

	1	
-		+
		

6.

x	-1,85	-1	0	3	4,85
y	0	5	0	-27	0

7. $H = \mathbb{R}$



f) $t: y = \frac{1}{1-x^2}$

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, funkce je sudá, není periodická

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) = 0$

3. $[0,1]$ s osou x neexistuje

4. $y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

	-1		0		1	
-		-		+		+
						

5. $y'' = \frac{-2(3x^4 - 2x^2 - 1)}{(1-x^2)^4} = \frac{-6(x^2 - 1) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3} \right)}{(1-x^2)^4}$

	-1		0		1	
-		+		+		-
						

6. graf

7. $H = (-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty)$



evropský
sociální
fond v ČR



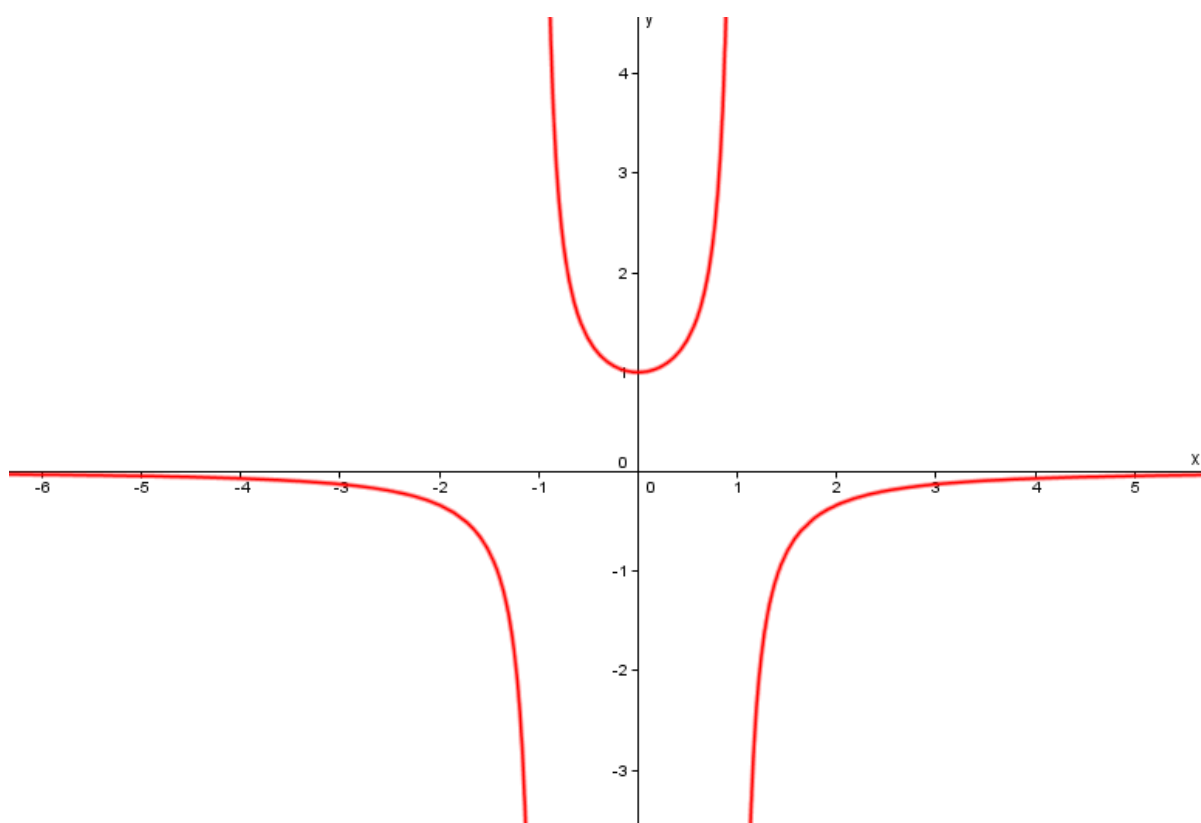
EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

g) $l: y = \sqrt{x} - x$

1. $D = \langle 0, \infty \rangle$, funkce není sudá ani lichá, není periodická, je spojitá

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - x) = -\infty$

3. $[0,0]$ a $[1,0]$

4. $y' = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

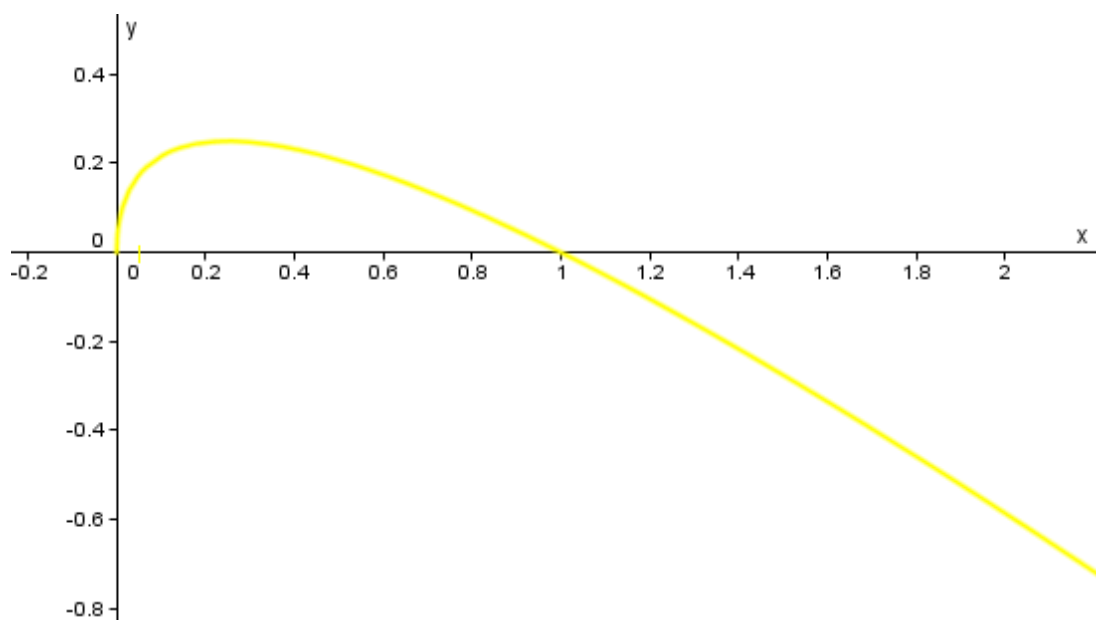
5. ---

6.

	0,25	
+		-
		

x	0	0,25	1
y	0	0,25	0

7. $H = (-\infty; 0,25]$



Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.