



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	RNDr. Vlasta Chytrá
Číslo sady	III/2-8-3-17
Anotace	Funkce daná implicitně – výklad, procvičení.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 4.A,B 17.1.2013, Matematický seminář

FUNKCE daná implicitně

- je určena nepřímo, daným určitým vztahem
- graf je částí křivky
- tedy rovnice obvykle určuje různé křivky
- také kuželosečky



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 1)

Najdi rovnici tečny ke křivce $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

v jejím bodě $T[4;?]$, vše zakresli do soustavy souřadnic.

Možnosti postupu: analyticky, využít derivace, implicitní funkce

I Analytická geometrie

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

$$36x + 45y - 225 = 0$$

$$t: y = -\frac{4}{5}x + 5$$

II Derivace

$$f: y = \frac{1}{5}\sqrt{225 - 9x^2} \text{ v okolí bodu } T$$

Vypočítej derivaci f' a dokonči $k_t = y'(4)$

$$y' = -\frac{9x}{5\sqrt{225 - 9x^2}}$$

$$k_t = y'(4) = -\frac{9 \cdot 4}{5\sqrt{225 - 9 \cdot 16}} = -\frac{4}{5}$$

$$t: y - \frac{9}{5} = -\frac{4}{5}(x - 4)$$

$$t: y = -\frac{4}{5}x + 5$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

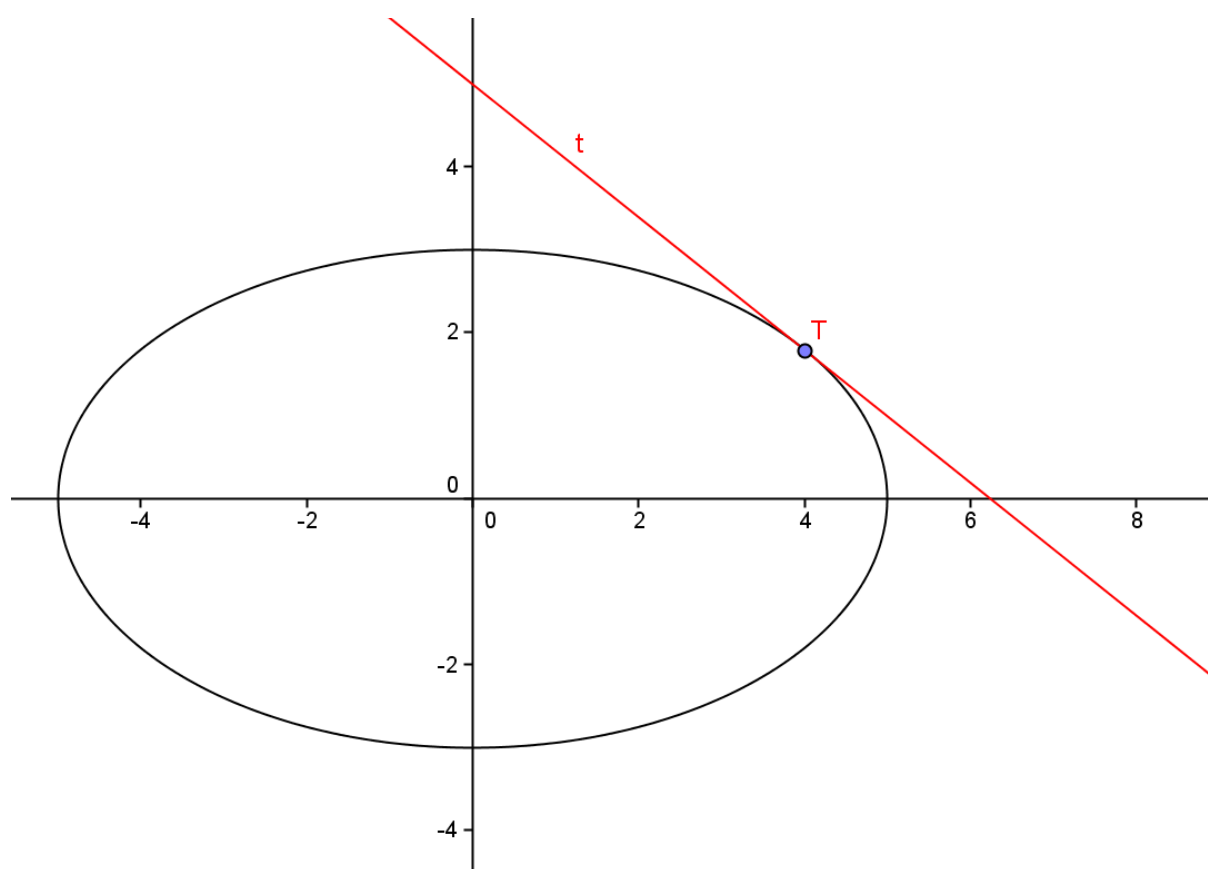


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Nákres



III Derivace funkce dané implicitně (výklad)

Uvažujeme, že ex. fce, která je částí křivky dané vztahem

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0, \text{ lze zapsat také } 9x_0^2 + 25(f(x_0))^2 = 225$$

Uvažujeme $\text{L strana} = \text{P strana}$
 $\text{předpis funkce} = \text{konstanta}$

Takže $\text{derivace funkce na L} = \text{derivace na P} = 0$

$$9x_0^2 + 25(f(x_0))^2 = 225 \quad \text{POZOR } f(x_0) \text{ je fce složená}$$

derivace: $9 \cdot 2 \cdot x_0 + 25 \cdot 2 \cdot f(x_0) \cdot f'(x_0) = 0$

vyjádřit $f'(x_0) \dots\dots f'(x_0) = -\frac{9x_0}{25f(x_0)}$

$$k_t = f'(4) = -\frac{9 \cdot 4}{25 \cdot \frac{9}{5}} = -\frac{4}{5}$$

$$t: y - \frac{9}{5} = -\frac{4}{5}(x - 4)$$

$$t: y = -\frac{4}{5}x + 5$$

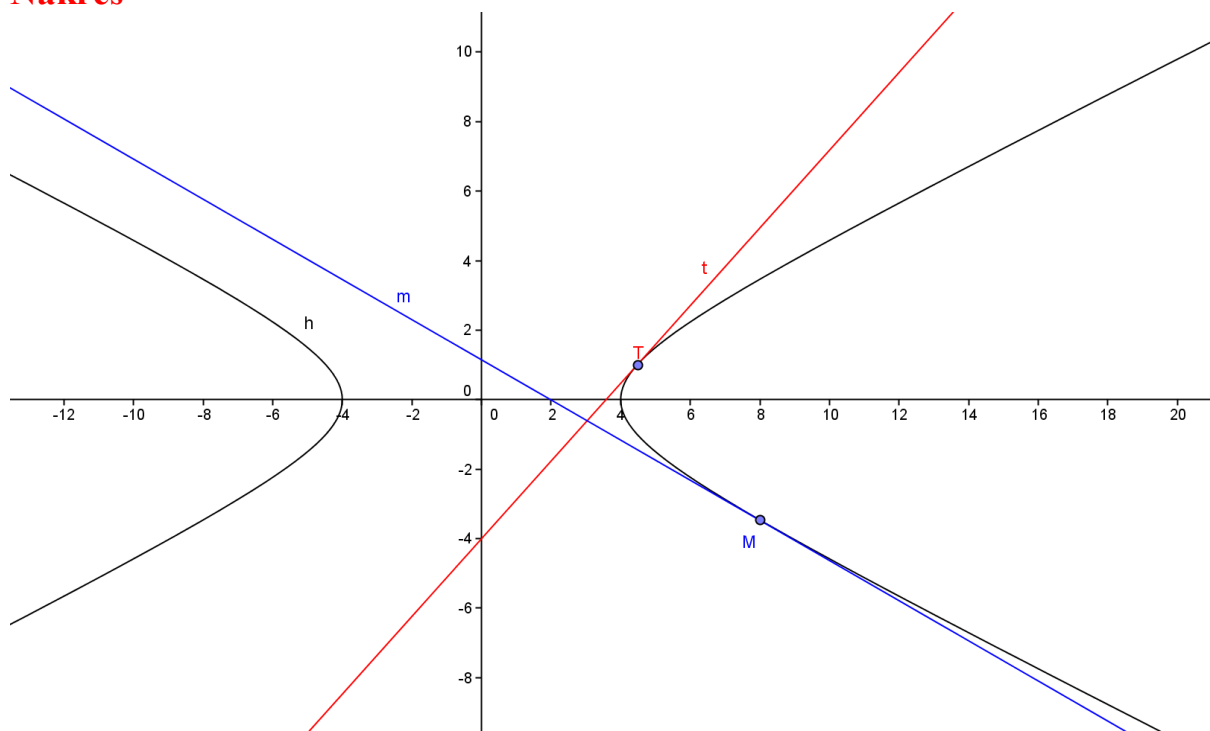
ÚMLUVA označíme úsporně $f(x_0) \rightarrow y_0 \dots\dots \text{je fce složená}$
 $f(x) \rightarrow y$

Příklad 2)

Najdi rovnici tečny ke křivce $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$

v jejím bodě $T[2\sqrt{5}; 1]$, $M[8; -2\sqrt{3}]$, vše zakresli do soustavy souřadnic.

Nákres



Derivace: $2x - 8yy' = 0$

$$y' = \frac{2x}{8y} = \frac{x}{4y}$$

$$k_t = y'(2\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$t: y - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2\sqrt{5})$$

$$t: y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - 4$$

$$k_m = y'(8) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$m: y + 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 8)$$

$$m: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Příklad 3)

Zakresli křivku $x^2 + y^2 - xy - 7 = 0$,

Vypočítej derivaci funkce dané implicitně

Najdi její tečny v bodech $T[0; \sqrt{7}]$, $M[2; -1]$, $Q[-2; -3]$

Řešení:

a) Hledáme body, které tvoří křivku, dosazováním do předpisu

Např. $x=0 \wedge y=...$ $y=0 \wedge x=...$
 $x=1 \wedge y=...$ $y=1 \wedge x=...$
 $x=2 \wedge y=...$ $y=2 \wedge x=...$
 $x=y \wedge ...$ apod.

b) Derivace $2x + 2yy' - (1 \cdot y + x \cdot 1 \cdot y') = 0$

$$2yy' - xy' = y - 2x$$

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

c) Tečny $T[0; \sqrt{7}]$, $M[2; -1]$, $Q[-2; -3]$

$$k_t = y'(0) = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{2} \quad \underline{t: y = \frac{1}{2}x + \sqrt{7}}$$

$$k_m = y'(2) = \frac{-1-4}{-2-2} = \frac{5}{4} \quad \underline{m: y = \frac{5}{4}x - \frac{7}{2}}$$

$$k_q = y'(-2) = \frac{-3+4}{-6+2} = -\frac{1}{4} \quad \underline{m: y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}}$$



evropský
sociální
fond v ČR



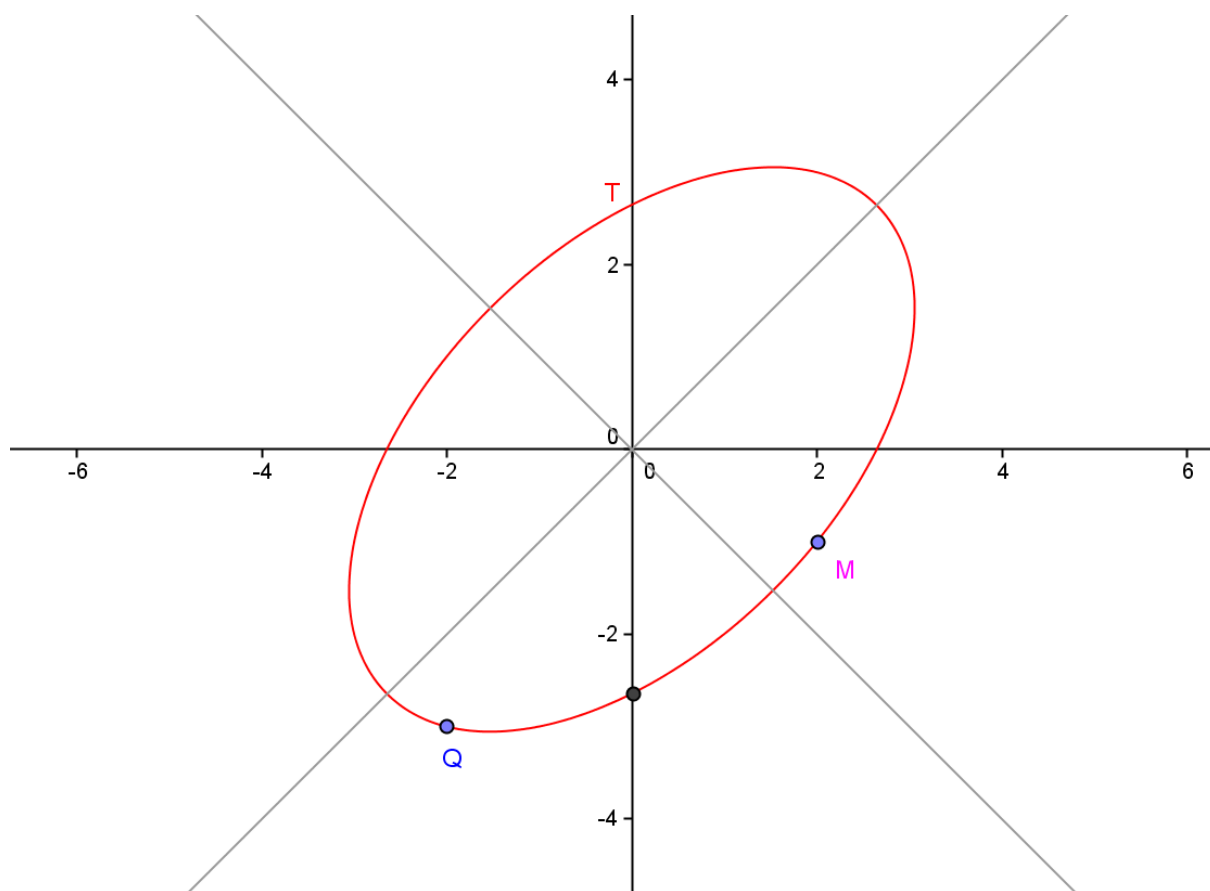
EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

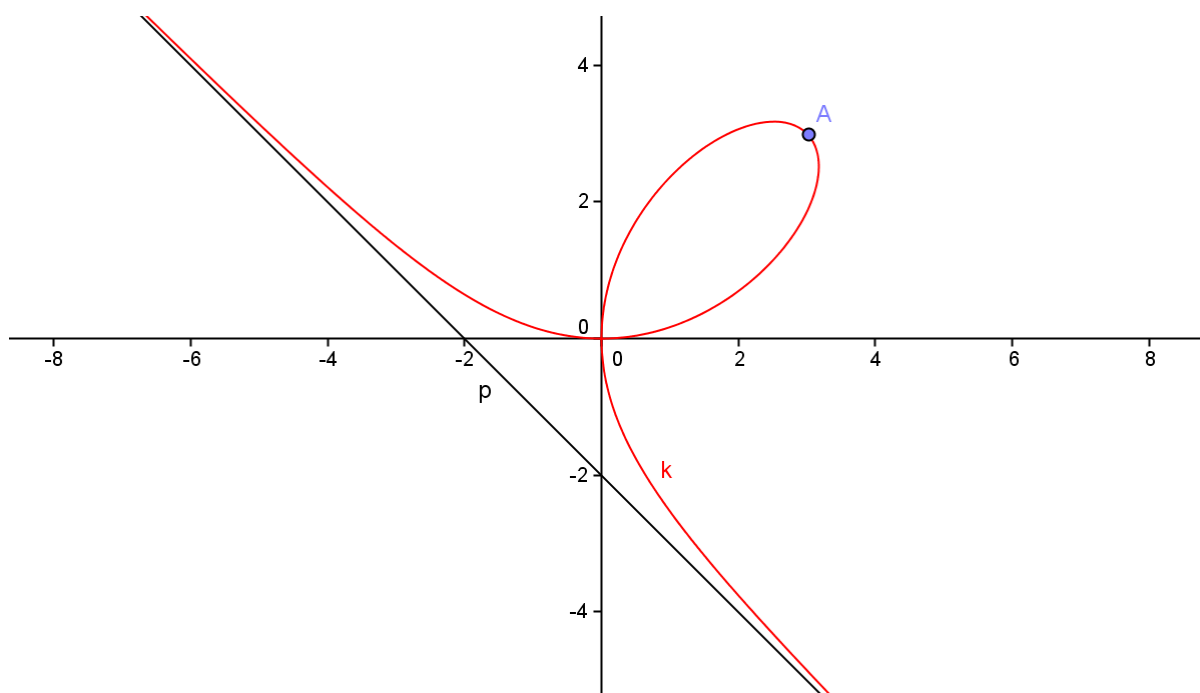


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



Křivka Descartesův list

- má rovnici $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
- prochází bodem $A\left[\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right]$ a má asymptotu $x + y + a = 0$
- zakresli do soustavy souřadnic křivku pro $a=2$
- zakresli její tečnu v bodě $A[3;3]$
- má rovnici $x^3 + y^3 - 6xy = 0$



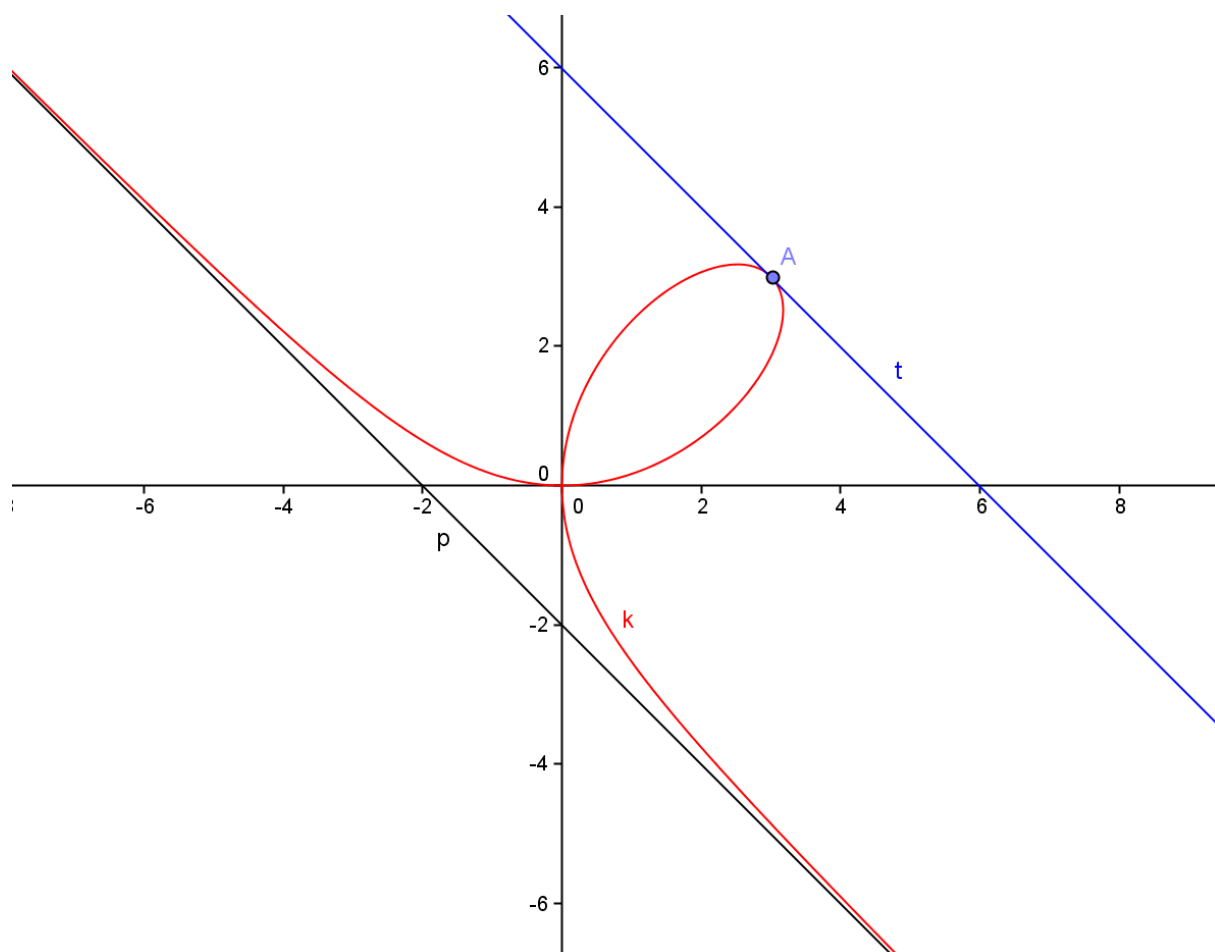
Derivace $3x^2 + 3y^2 y' - 6(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$

$$3y^2 y' - 6xy' = 6y - 3x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

Tečna $k_t = y'(3) = \frac{6-9}{9-6} = -1$ $t: y-3 = -(x-3)$

$t: y = -x + 6$



- Všechny použité grafy a nákresy jsou vlastní s využitím programu GeoGebra.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ. *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet. 2., upravené vyd.* Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-210-4.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-099-3.
- RIEČAN, Beloslav, Tibor NEUBRUNN. *Základy diferenciálního počtu pro III. Ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku.* 2. vyd. Praha: SPN, 1986. Učebnice pro střední školy.