



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



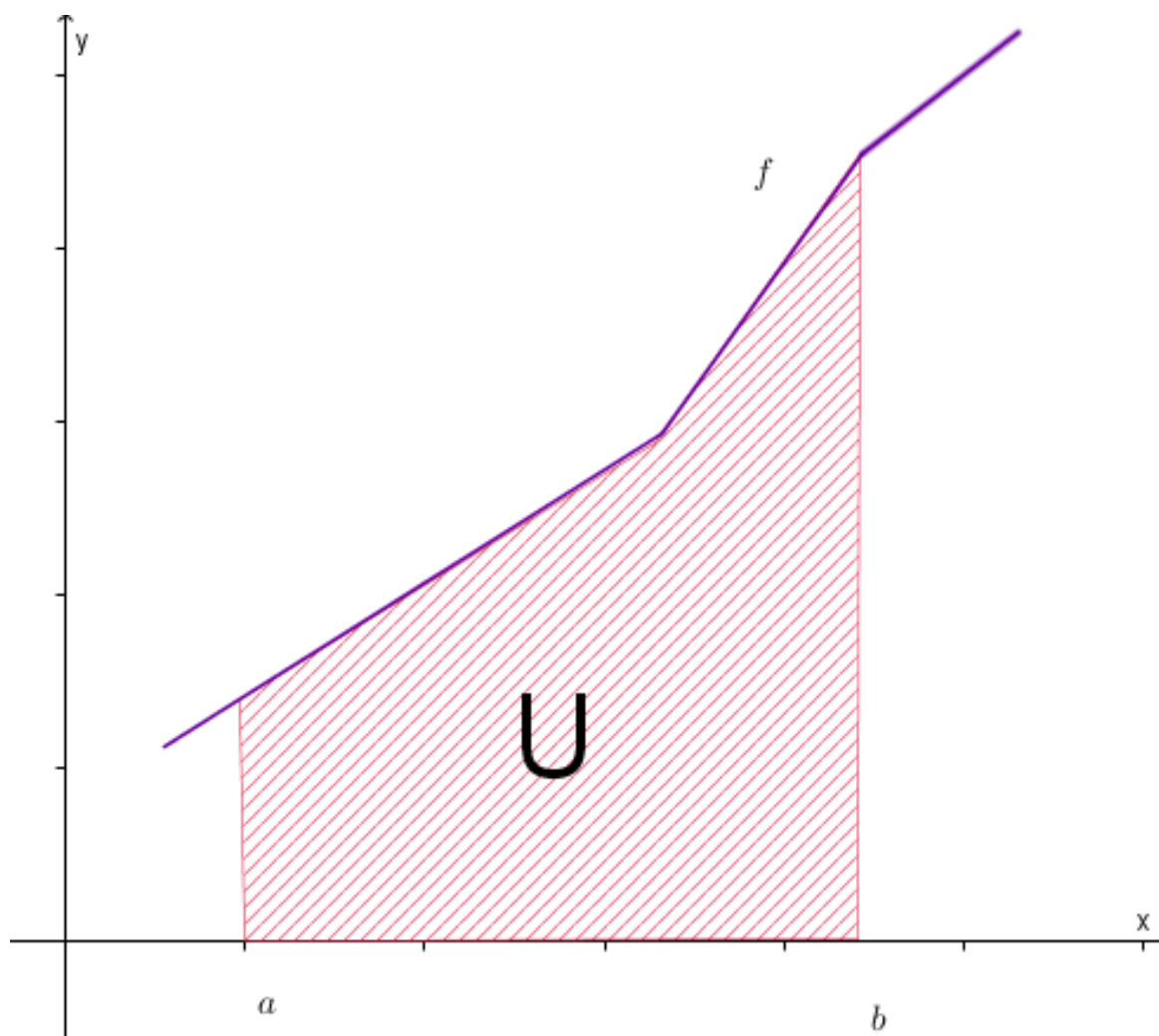
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-3-18
Anotace	Pracovní list - užití určitého integrálu pro výpočet obsahů útvarů - příklady, včetně řešení. Povolené pomůcky: rýsovací potřeby, kalkulačka. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 13.3.2013, Matematika

UŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU VÝPOČET OBSAHŮ

$$S(U) = \int_a^b f(x) dx$$



ZADÁNÍ

Příklad 1.

Vypočítejte obsahy útvarů omezených zadanými křivkami (zakreslete do soustavy souřadnic):

a) $f : y = -x^2 + 4$, $g : y = x + 2$

b) $f : y = 2x$, $g : y = \frac{8}{x}$, $x \in \langle 0, 6 \rangle$

c) $f : y = -2x^2 + 3$, $g : y = x^2$

d) $f : y = 1 - x^2$, $g : y = x^2 - 1$

e) $f : y = \sin x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

f) $f : y = x^2$, $g : y = \sqrt{x}$

g) $f : y = x^2$, $g : y = \frac{x^2}{4}$, $h : y = 4$

h) $f : y = x^3$, $g : y = 8$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

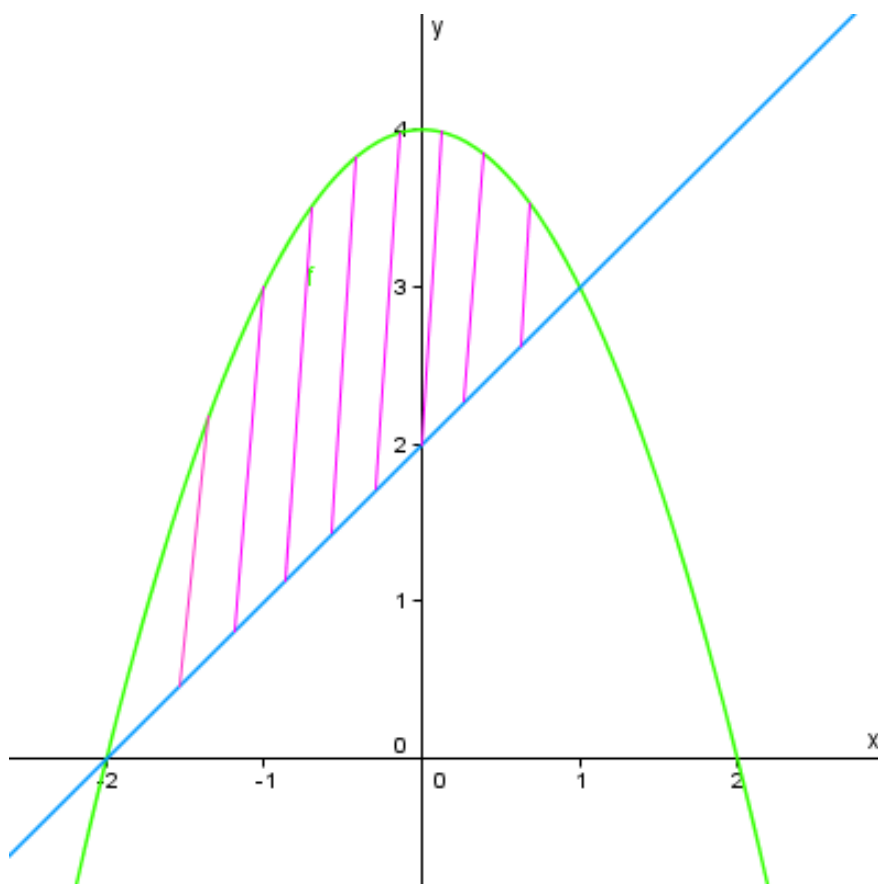


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

Příklad 1.

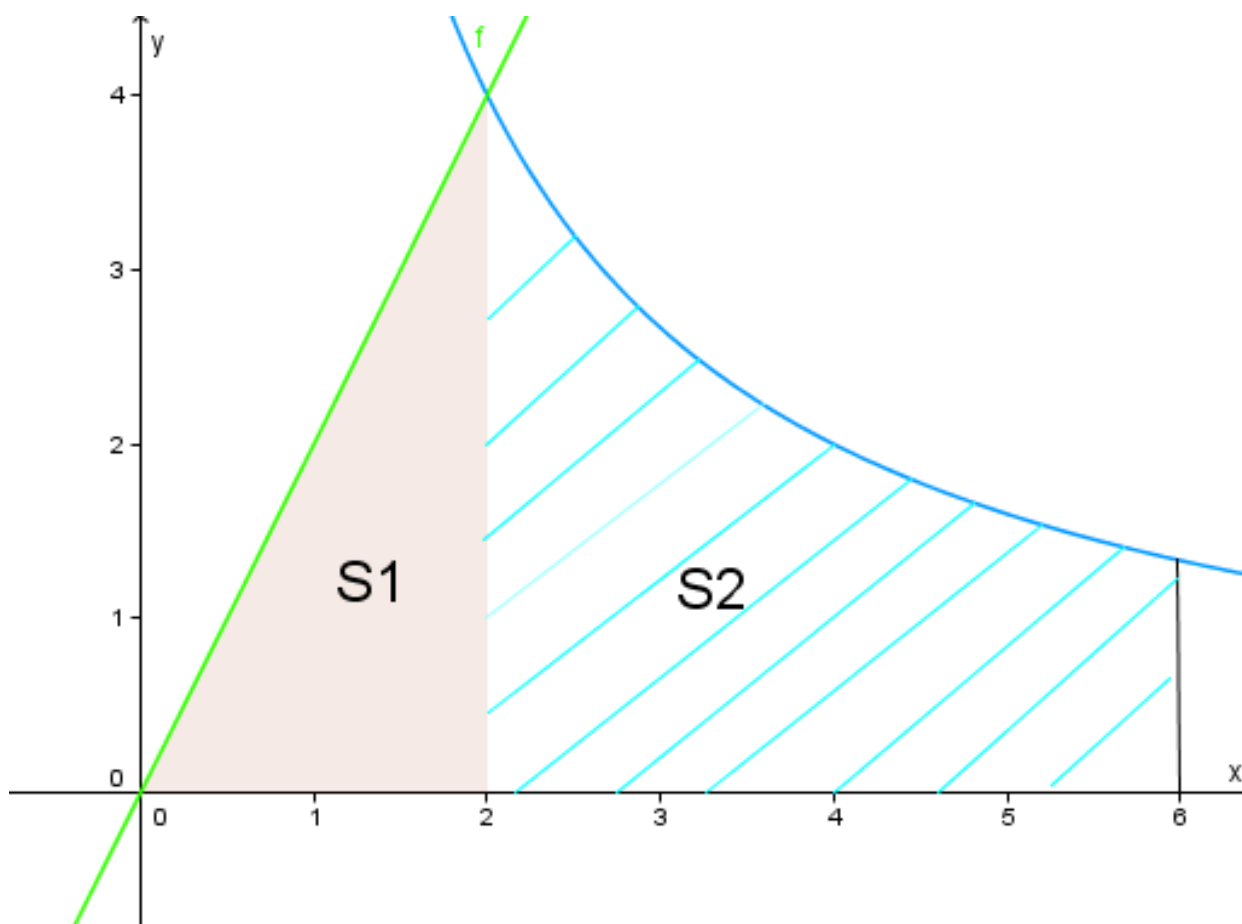
a) $f : y = -x^2 + 4$, $g : y = x + 2$



$$S = \int_{-2}^1 [-x^2 + 4 - (x + 2)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 =$$

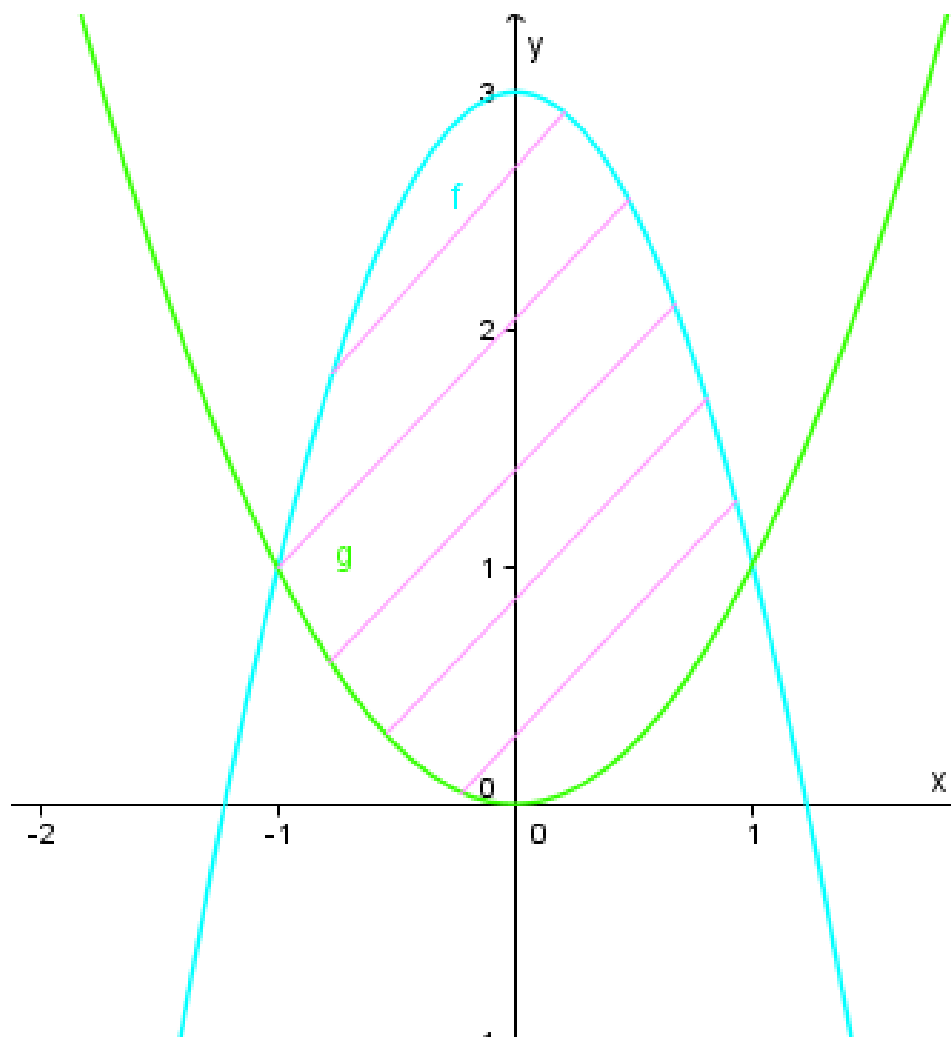
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) = \underline{\underline{\frac{27}{6}}}$$

b) $f: y = 2x$, $g: y = \frac{8}{x}$, $x \in \langle 0, 6 \rangle$



$$S = \int_0^2 2x dx + \int_2^6 \frac{8}{x} dx = \left[x^2 \right]_0^2 + \left[8 \ln|x| \right]_2^6 = 4 + 8 \ln 6 - 8 \ln 2 = \underline{\underline{12,78 j^2}}$$

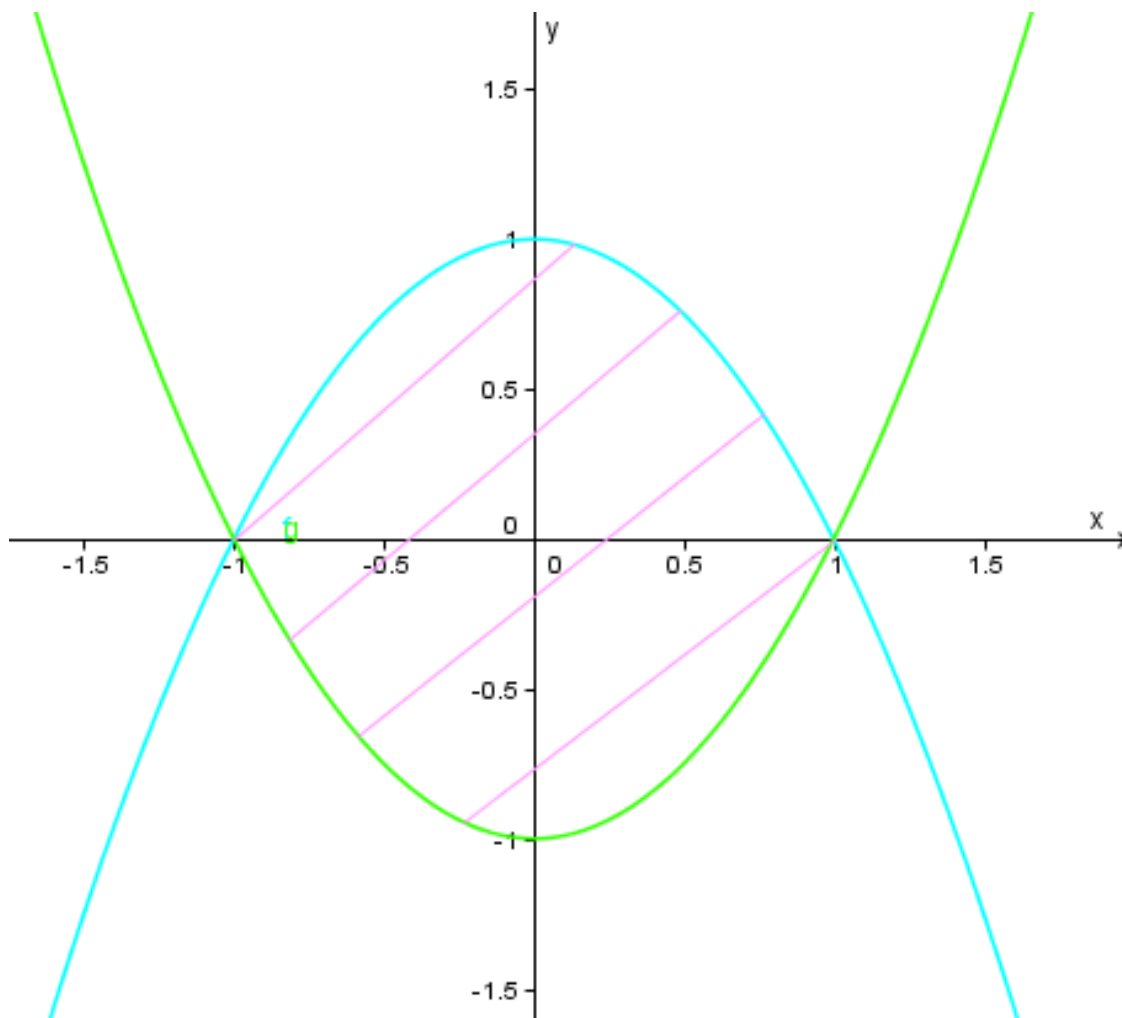
c) $f : y = -2x^2 + 3$, $g : y = x^2$



$$S = 2 \cdot \int_0^1 [-2x^2 + 3 - (x^2)] dx = 2 \cdot \int_0^1 (-3x^2 + 3) dx = 2 \cdot [-x^3 + 3x]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot (-1 + 3) = \underline{\underline{4j^2}}$$

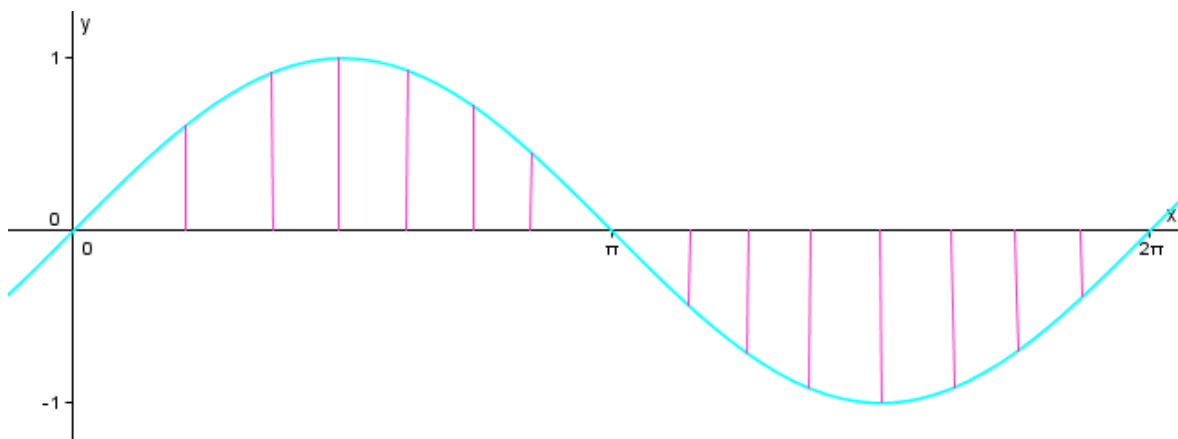
d) $f: y = 1 - x^2$, $g: y = x^2 - 1$



$$S = 2 \cdot \int_0^1 [1 - x^2 - (x^2 - 1)] dx = 2 \cdot \int_0^1 (-2x^2 + 2) dx = 2 \cdot \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 =$$

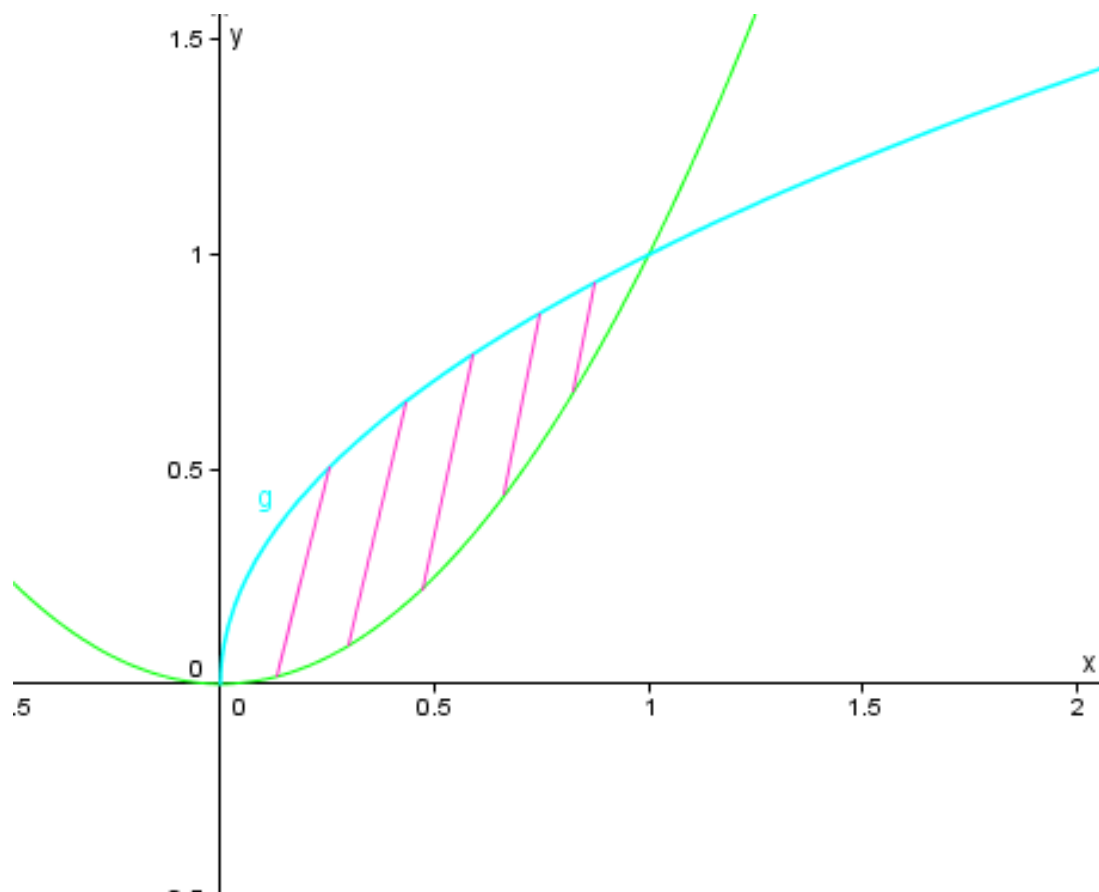
$$= 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3} j^2}}$$

e) $f : y = \sin x, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$



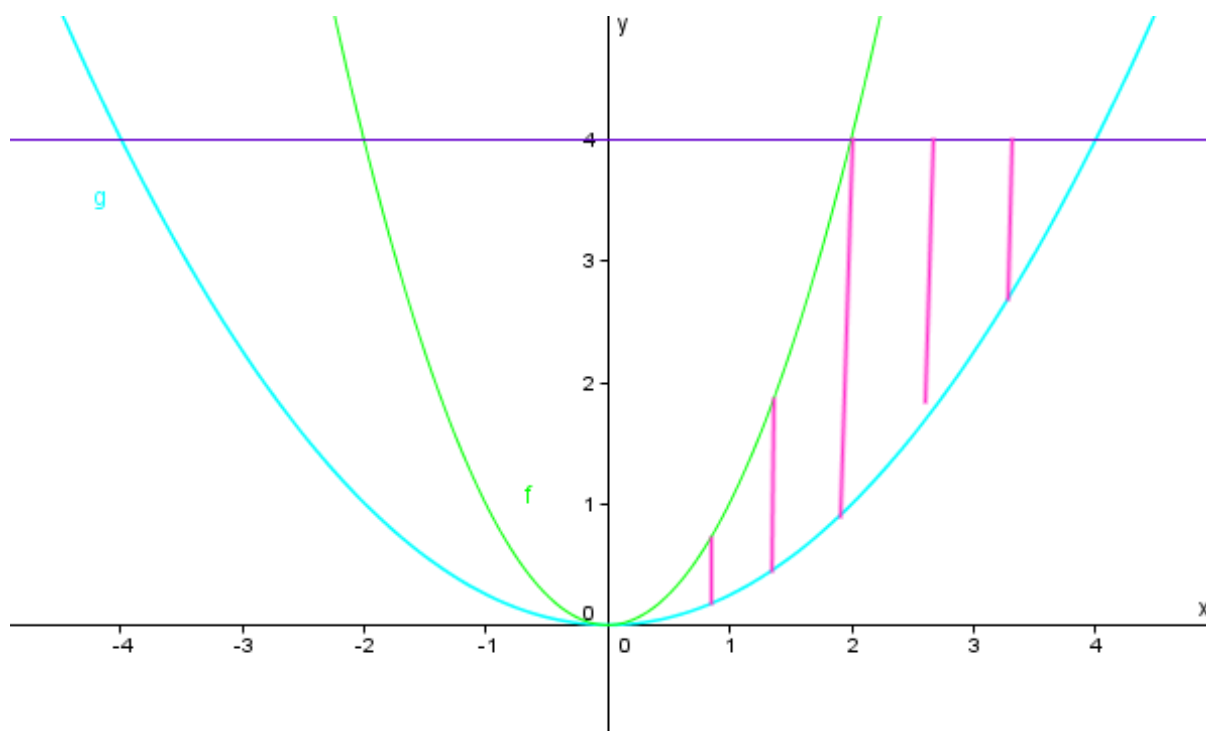
$$S = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \cdot [-\cos x]_0^{\pi} = 2(1+1) = \underline{\underline{4j^2}}$$

f) $f: y = x^2$, $g: y = \sqrt{x}$



$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

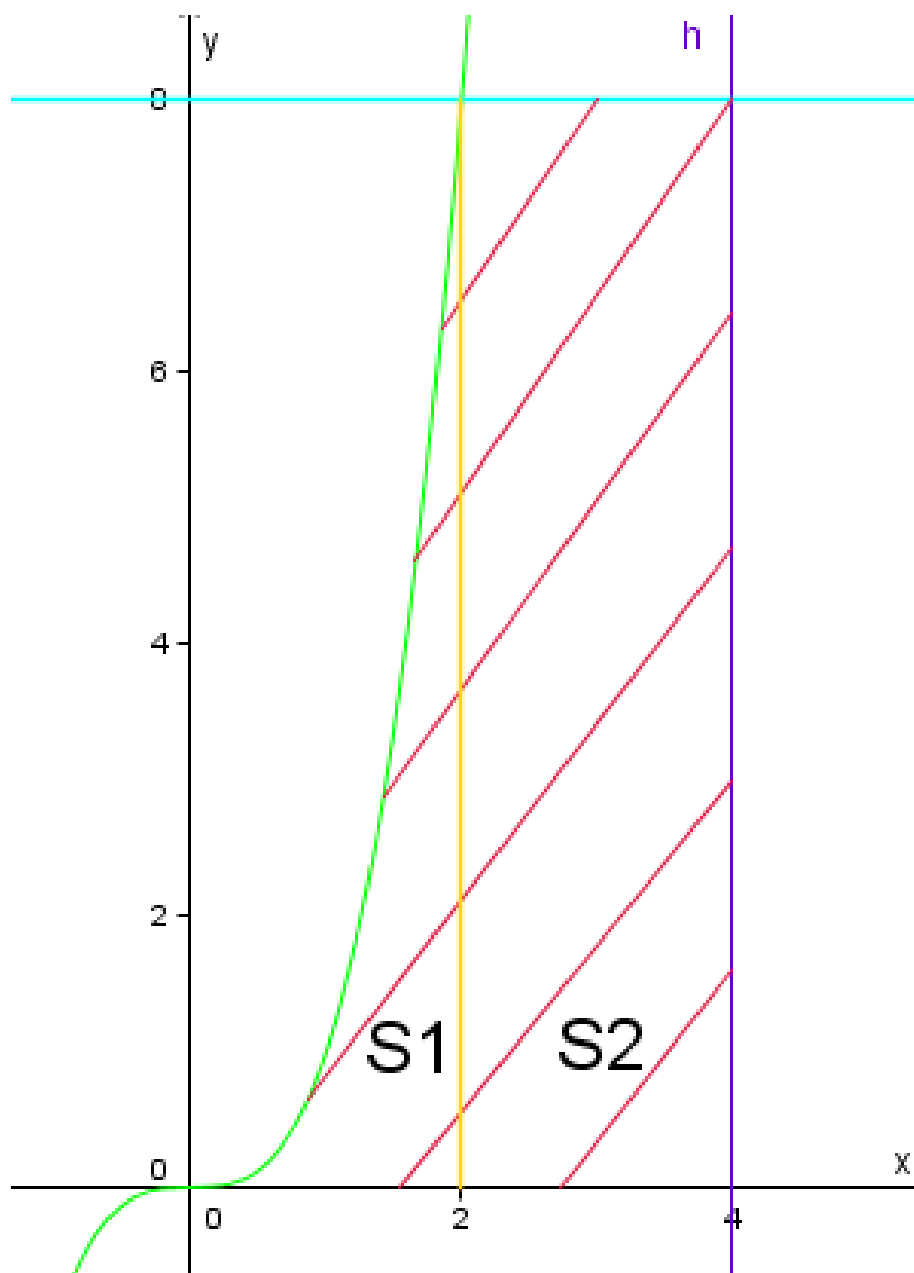
g) $f: y = x^2$, $g: y = \frac{x^2}{4}$, $h: y = 4$



$$S = 2 \cdot \left[\int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_2^4 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx \right] = 2 \cdot \left(\left[\frac{x^3}{4} \right]_0^2 + \left[4x - \frac{x^3}{12} \right]_2^4 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(2 + 16 - \frac{16}{3} - 8 + \frac{2}{3} \right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3} j^2}}$$

h) $f: y = x^3$, $g: y = 8$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$



$$S = \int_0^2 x^3 dx + \int_2^4 8 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 + [8x]_2^4 = 4 + 32 - 16 = \underline{\underline{20}}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost