



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



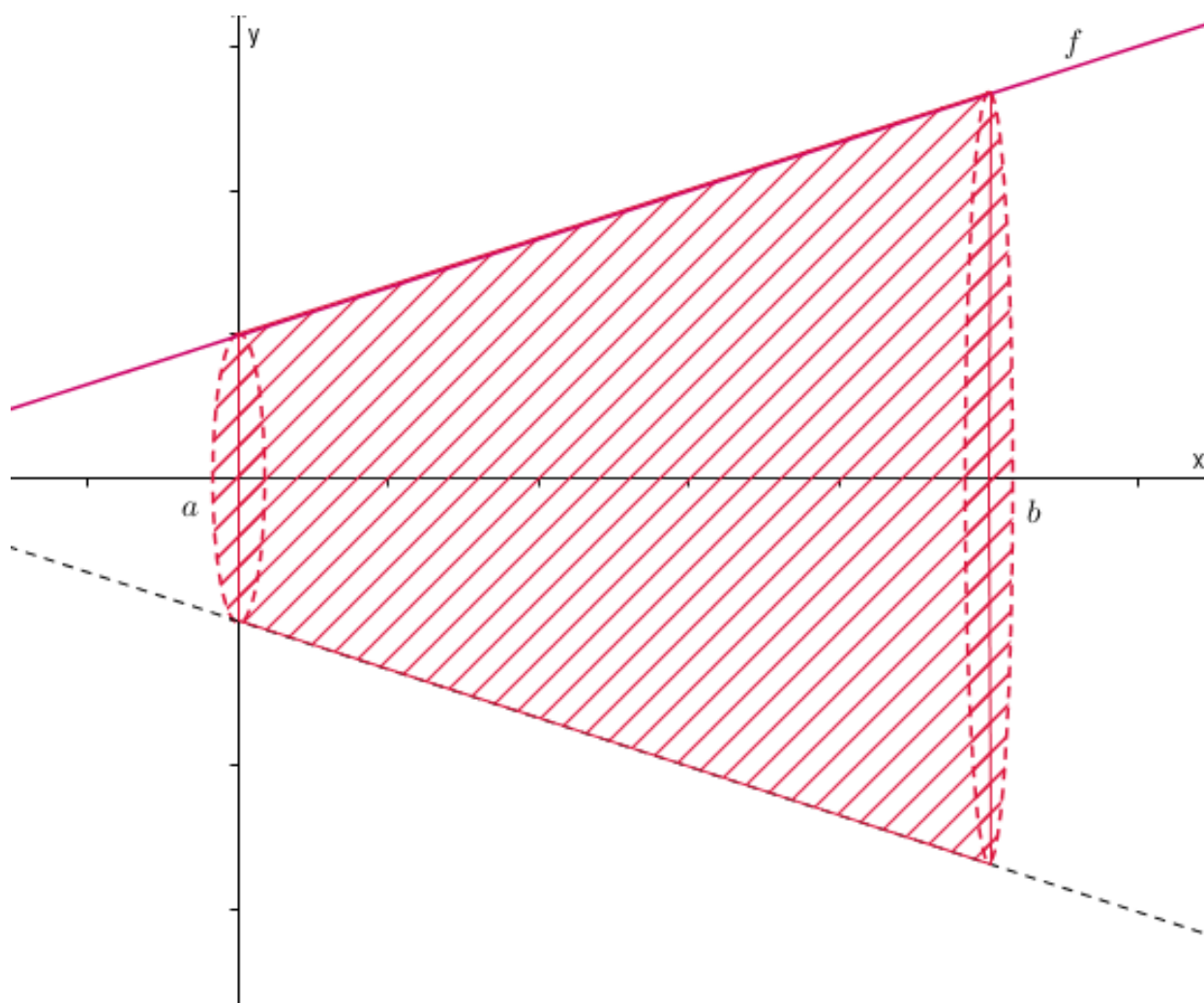
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-3-19
Anotace	Pracovní list - užití určitého integrálu pro výpočet objemů rotačních těles - příklady, včetně řešení. Povoleno pomůcky: rýsovací potřeby, kalkulačka. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 20.3.2013, Matematika

UŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU VÝPOČET OBJEMŮ

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



ZADÁNÍ

Příklad 1.

Vypočítejte objemy útvarů omezených zadanými křivkami (zakreslete do soustavy souřadnic):

a) $f : y = x^2$, $g : y = x$

b) $f : y = x^2$, $g : y = 4$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$

c) $f : y = x^2 + 3$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$

d) $f : y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$

e) $f : y = 4 - \frac{1}{x^2}$, $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$

f) $f : y = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

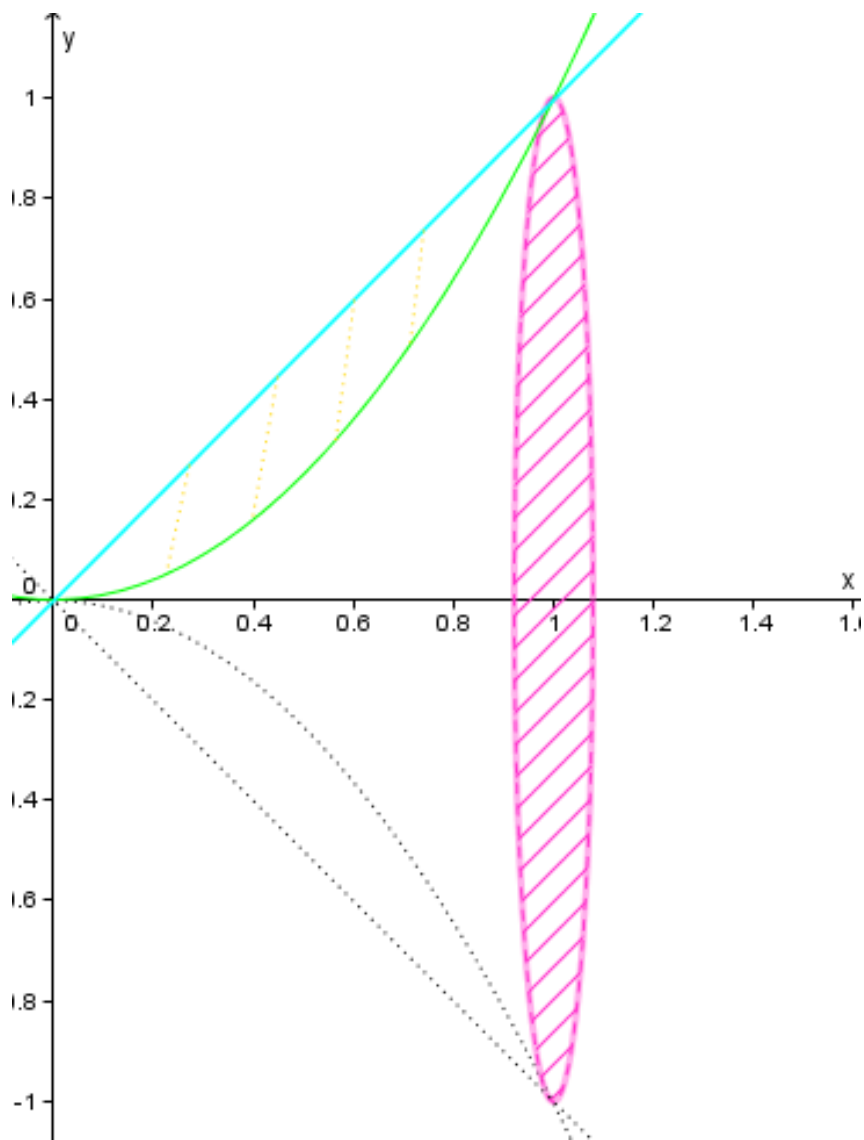


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ŘEŠENÍ

Příklad 1.

a) $f: y = x^2$, $g: y = x$



$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - (x^2)^2] dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{15}}}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

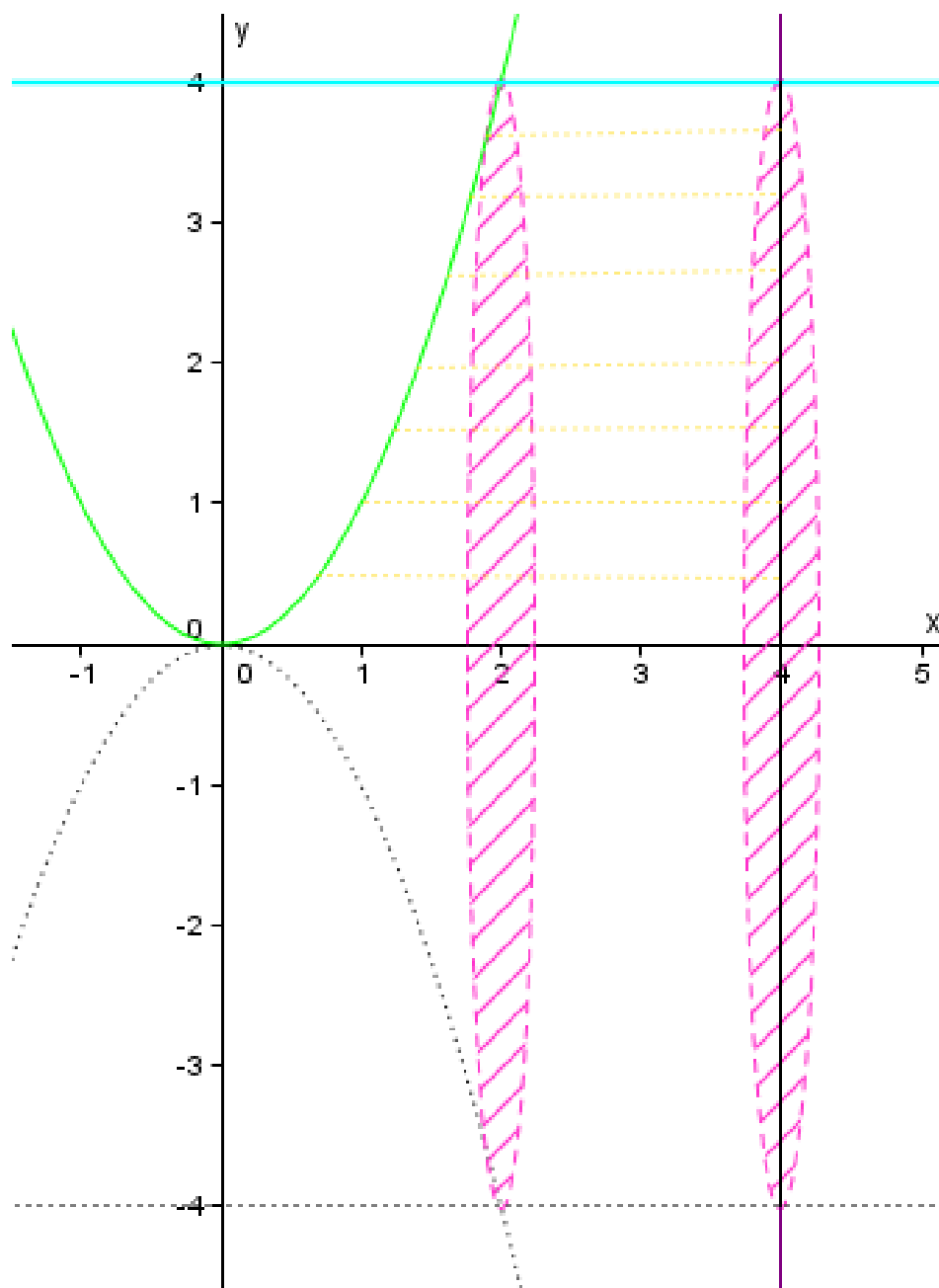


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

b) $f: y = x^2$, $g: y = 4$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$



$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx + \pi \int_2^4 4^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 + \pi [16x]_2^4 = \frac{32\pi}{5} + \pi(64 - 32) = \frac{192\pi}{5} j^3$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

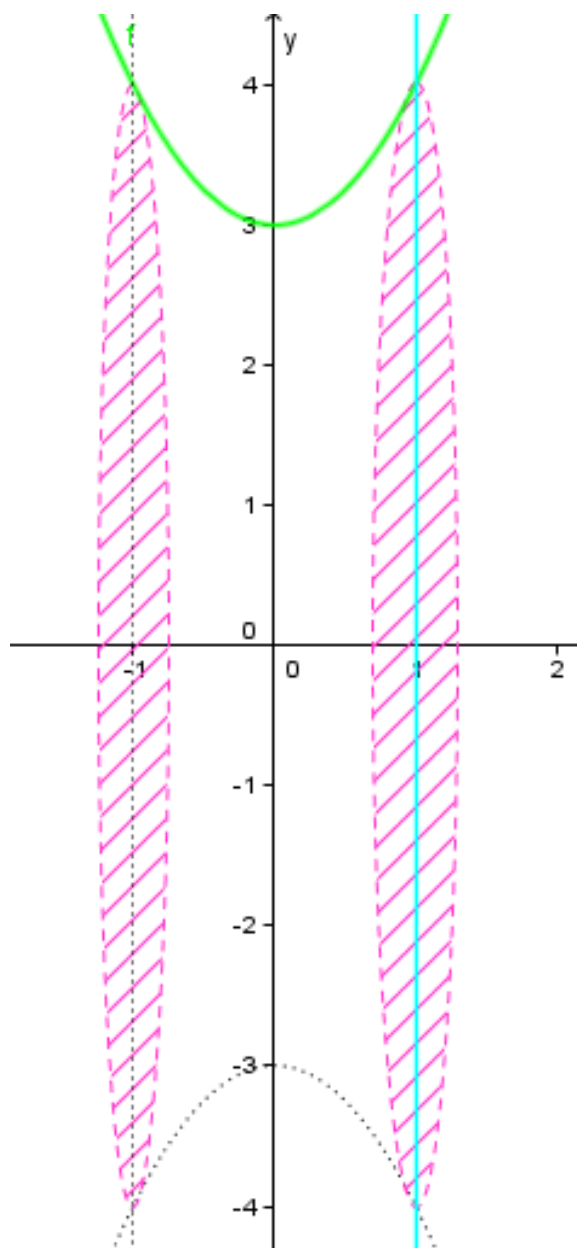


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



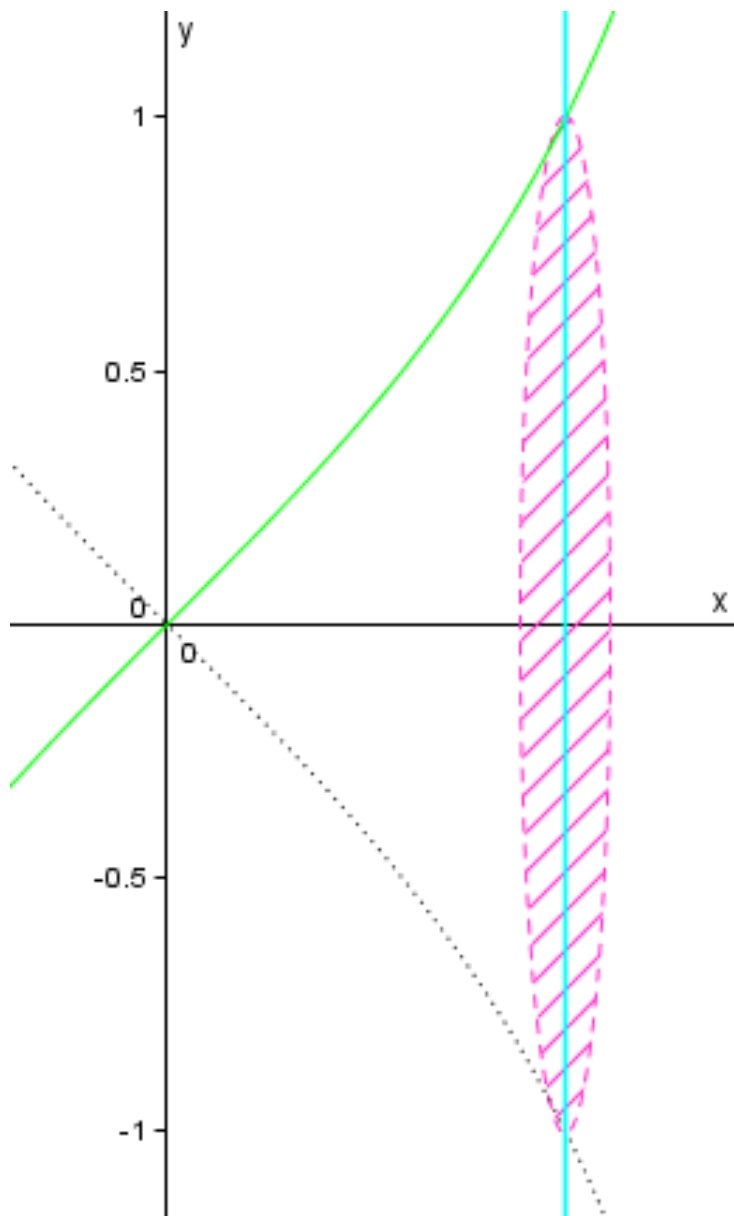
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

c) $f : y = x^2 + 3, x \in \langle -1, 1 \rangle$



$$V = 2\pi \int_0^1 (x^2 + 3)^2 dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + 6\frac{x^3}{3} + 9x \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{5} + 2 + 9 \right) = \underline{\underline{\frac{112\pi}{5} j^3}}$$

d) $f : y = \operatorname{tg} x, x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$



$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi [\operatorname{tg} x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{4\pi - \pi^2}{4} j^3}}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

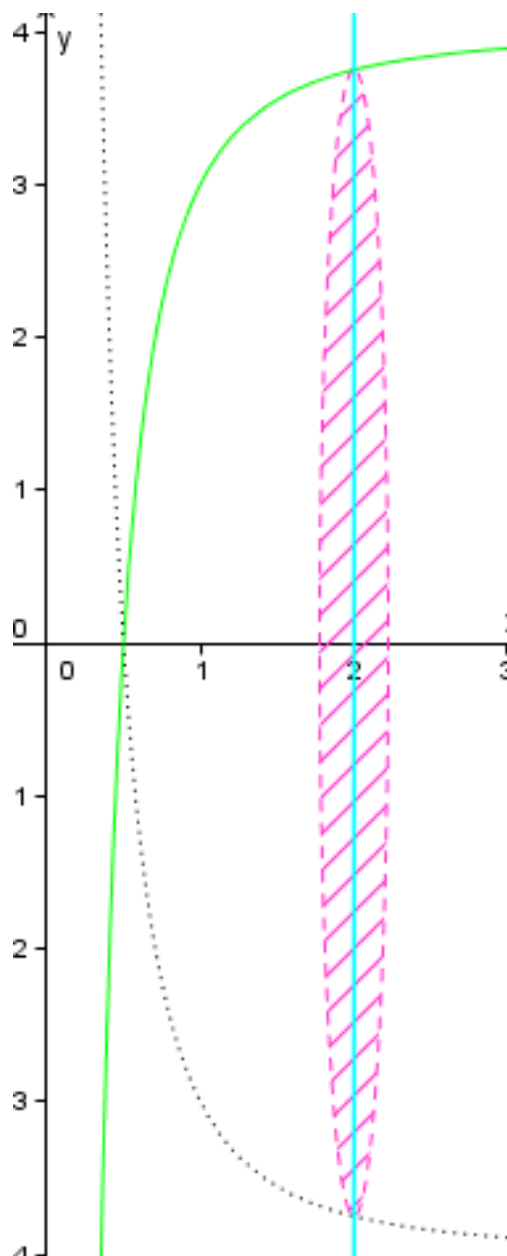


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



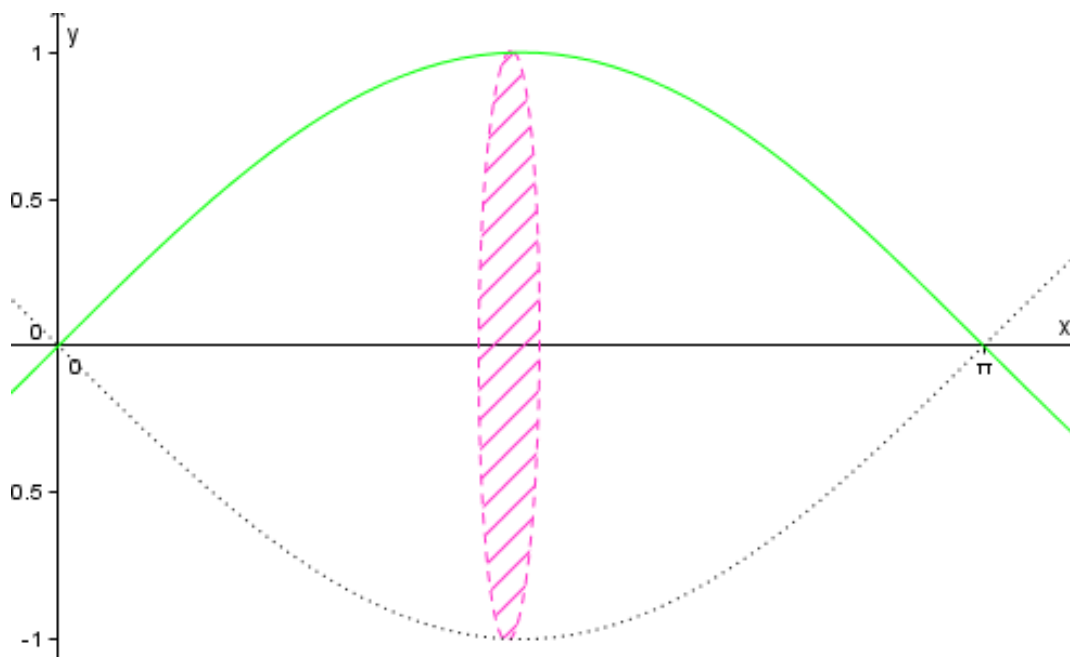
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

e) $f : y = 4 - \frac{1}{x^2}, x \in \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$



$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(4 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \pi \left[16x + \frac{8}{x} - \frac{x^{-3}}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \pi \left[\left(32 + 4 - \frac{1}{24} \right) - \left(8 + 16 - \frac{8}{3} \right) \right] = \underline{\underline{\frac{117\pi}{8}}}$$

f) $f : y = \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$



$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} \right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2} j^3}}$$

$$\int \sin^2 x dx$$

$$u = \sin x \quad u' = \cos x \quad v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x - \int -\cos^2 x dx =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx$$

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{-\sin x \cdot \cos x + x}{2} + C$$

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost