



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název školy	Gymnázium Josefa Ressela, Chrudim, Olbrachtova 291
Název a číslo OP	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, CZ. 1.5, Název projektu: Inovace ve vzdělávání na Gymnáziu Chrudim, reg.č.:CZ.1.07/1.5.00/34.0249
Název šablony klíčové aktivity	III/2 Zvyšování kvality výuky prostřednictvím ICT
Tematická oblast (předmět)	MATEMATIKA
Název sady vzdělávacích materiálů	FUNKCE A JEJICH UŽITÍ
Jméno tvůrce vzdělávací sady	Mgr. Bc. Zuzana Leksová
Číslo sady	III/2-8-3-20
Anotace	Pracovní list – integrační metody („Per partes“ a „Substituční metoda“) - příklady, včetně řešení. Povolené pomůcky: -. Předpokládaný čas vypracování 30 min.
Ověřeno ve výuce: ročník, třída, dne, předmět	4. ročník vyššího gymnázia, 8.E, 6.3.2013, Matematika

INTEGRAČNÍ METODY

1. Per partes

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx$$

2. Substituční metoda

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(t)dt; t = g(x)$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

ZADÁNÍ

Příklad 1.

Vypočítejte zadané integrály (PER PARTES):

a) $\int x \cdot \sin x dx$

b) $\int x \cdot \cos x dx$

c) $\int x \cdot e^x dx$

d) $\int \ln x dx$

e) $\int \sin^2 x dx$

f) $\int \cos^2 x dx$

g) $\int x \cdot \ln^2 x dx$

h) $\int e^x \cdot \cos x dx$

ŘEŠENÍ

Příklad 1.

a) $\int x \cdot \sin x dx$

$u = x$	$v' = \sin x$
$u' = 1$	$v = -\cos x$

$$\int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

b) $\int x \cdot \cos x dx$

$u = x$	$v' = \cos x$
$u' = 1$	$v = \sin x$

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

c) $\int x \cdot e^x dx$

$u = x$	$v' = e^x$
$u' = 1$	$v = e^x$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

d) $\int \ln x dx$

$u = \ln x$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln x - x + C$$

e) $\int \sin^2 x dx$

$u = \sin x$	$v' = \sin x$
$u' = \cos x$	$v = -\cos x$

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x - \int -\cos^2 x dx =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx$$

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{-\sin x \cdot \cos x + x}{2} + C$$

f) $\int \cos^2 x dx$

$u = \cos x$	$v' = \cos x$
$u' = -\sin x$	$v = \sin x$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \sin x \cdot \cos x - \int -\sin^2 x dx = \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \\ &= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx \end{aligned}$$

$$2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} + C$$

g) $\int x \cdot \ln^2 x dx$

$u = \ln^2 x$	$v' = x$
$u' = \frac{2 \ln x}{x}$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \cdot \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x dx =$$

$u = \ln x \quad v' = x$ $u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \frac{x^2}{4} + C$$

h) $\int e^x \cdot \cos x dx$

$u = e^x \quad v' = \cos x$ $u' = e^x \quad v = \sin x$

$$\int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx =$$

$u = e^x \quad v' = \sin x$ $u' = e^x \quad v = -\cos x$
--

$$= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cdot \sin x - \left(-e^x \cdot \cos x - \int -e^x \cdot \cos x dx \right) =$$

$$= e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x dx \quad \text{tj.}$$

$$\int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x dx$$

$$2 \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$$

$$\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x}{2} + C$$

Příklad 2.

Vypočítejte zadané integrály (SUBSTITUČNÍ METODA):

a) $\int (2x+1)^5 dx$

b) $\int (4x^2 + 2)^3 \cdot 16x dx$

c) $\int \frac{1}{(x+1)^3} dx$

d) $\int \sin 5x dx$

e) $\int \sin x \cdot \cos^3 x dx$

f) $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$

g) $\int 10x \cdot (x^2 + 13)^{12} dx$

h) $\int 5x^2 \cdot e^{x^3} dx$

ŘEŠENÍ**Příklad 2.**

a) $\int (2x+1)^5 dx$

$$t = 2x+1$$

$$dt = 2dx$$

$$\frac{1}{2} \int (2x+1)^5 2dx = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{t^6}{12} + C = \frac{(2x+1)^6}{12} + C$$

b) $\int (4x^2 + 2)^3 \cdot 16x dx$

$$t = 4x^2 + 2$$

$$dt = 8x dx$$

$$2 \int (4x^2 + 2)^3 \cdot 8x dx = 2 \int t^3 dt = 2 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{(4x^2 + 2)^4}{2} + C$$

c) $\int \frac{1}{(x+1)^3} dx$

$$t = x+1$$

$$dt = 1dx$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$\int (x+1)^{-3} dx = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C$$

d) $\int \sin 5x dx$

$$\begin{aligned} t &= 5x \\ dt &= 5dx \end{aligned}$$

$$\frac{1}{5} \int \sin 5x \cdot 5dx = \frac{1}{5} \int \sin t dt = -\frac{1}{5} \cos t + C = -\frac{\cos 5x}{5} + C$$

e) $\int \sin x \cdot \cos^3 x dx$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}$$

$$-\int \cos^3 x \cdot (-\sin x) dx = -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$$

f) $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$

$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

$$\int \sin^3 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int (t^3 - t^5) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \\ = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

g) $\int 10x \cdot (x^2 + 13)^{12} dx$

$t = x^2 + 13$ $dt = 2x dx$

$$5 \int (x^2 + 13)^{12} \cdot 2x dx = 5 \int t^{12} dt = 5 \cdot \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{5(x^2 + 13)^{13}}{13} + C$$

h) $\int 5x^2 \cdot e^{x^3} dx$

$t = x^3$ $dt = 3x^2 dx$

$$\frac{5}{3} \int e^{x^3} \cdot 3x^2 dx = \frac{5}{3} \int e^t dt = \frac{5}{3} \cdot e^t + C = \frac{5}{3} e^{x^3} + C$$

Příklady na procvičení

Vypočítejte zadané integrály:

a) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

b) $\int 3x \cdot \sqrt[4]{x^2 + 5} dx$

c) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

d) $\int \frac{5}{2x-3} dx$

e) $\int \frac{5}{(2x-3)^4} dx$

f) $\int (2x-5)^7 dx$

g) $\int 8x^2 \cdot (x^3 + 2)^5 dx$

h) $\int 5x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx$

ch) $\int \frac{3x}{(x^2 + 4)^3} dx$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

i) $\int \frac{4}{7-5x} dx$

j) $\int \frac{5x}{3x^2+1} dx$

k) $\int \sin 7x dx$

l) $\int 5k \cdot \cos \frac{8}{3} x dx$

m) $\int 3e^{-x} dx$

n) $\int 2e^{3x-1} dx$

o) $\int 5x \cdot e^{x^2} dx$

p) $\int 3x^4 \cdot e^{-x^5+2} dx$

q) $\int 3 \frac{\ln x}{x} dx$

r) $\int 7 \frac{\ln^4 x}{x} dx$

s) $\int \sin^3 x dx$

t) $\int \cos^5 x dx$

u) $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$

v) $\int 4x^2 \cdot e^{x^3} dx$

Použité zdroje:

- Všechny použité obrázky nebo grafy jsou vlastní, vytvořené v programech Malování nebo GeoGebra.
- HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
- KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost